

SIRモデル

中央大学工学部物理学科学部4年香取研究室

赤池 誠

感染症モデル

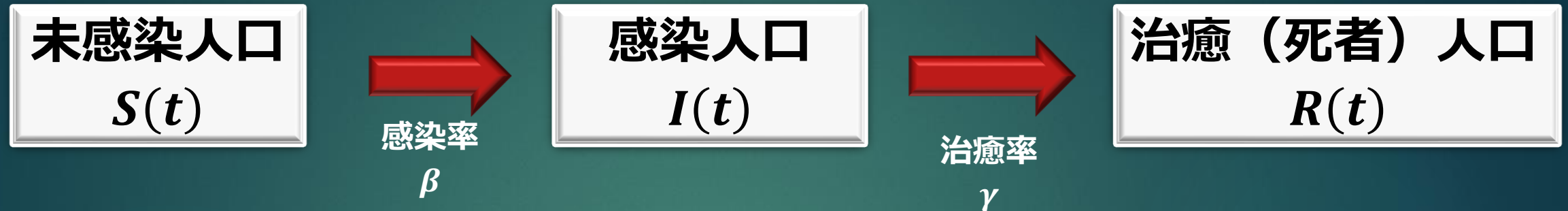
2020年新型コロナウイルスが流行し、感染拡大における数理モデルについて興味を持った。この数理モデルはここ100年の間に考えられたモデルで、現在では様々な感染症数理モデルが存在する。2020年における新型コロナウイルスにおいても、この数理モデルを使用した論文が多く報告されている。今回、感染症数理モデルにおいて最も基本的なSIRモデルというものについて調査・まとめたいと考える。

SIRモデル1

SIRモデルとは、ケルマック氏とマッケンドリック氏らが考えた代表的な感染症数理モデルである。

SIRモデルというのは、閉じた系（地域）であるとき、**未感染人口** $S(t)$ 、**感染人口** $I(t)$ 、**治癒（死者）人口** $R(t)$ の3つの準位系で考えるモデルである。このとき、これら3つの人口は時間に依存する。それらは未感染者から感染者になり、感染者から治癒者になる関係である。注意点として、未感染者は免疫を獲得していない、治癒者が再感染しないししないと仮定している。

SIRモデル2



未感染人口 $S(t)$ が感染率 β で**感染人口 $I(t)$** になり、**感染人口 $I(t)$** が治癒率 γ で**治癒 (死者) 人口 $R(t)$** になるようなモデルを考える。このとき以下の3つの式が成り立つ[1]。

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad \dots (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad \dots (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad \dots (3)$$

SIRモデル3

(1)は、「単位時間内に一人の I が一人の S と接触を起こす確率」を意味する感染率 β を用いて、単位時間あたりの**未感染人口 S** の変化が $-\beta SI$ であるということである。

(3)は、「単位時間内に一人の I が治癒して R に移る確率」意味する治癒率 γ を用いて、単位時間あたりの**治癒人口 R** の変化が γI であるということである。

(2)は、未感染者から感染者になり、感染者から治癒者になる関係があるから、単位時間あたりの**感染人口 I** の変化が $\beta SI - \gamma I$ であるということである。

SIRモデルを解く

では今回、SIRモデルにおける(2)式を解く。

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$
$$\frac{dI}{dt} = (\beta S - \gamma)I$$

となるから、

$$I = I_0 e^{(\beta S - \gamma)t}$$

となる。ただし I_0 は定数である。

すなわち、感染人口とは指数関数的な変化をすると言える。

基本再生産数 R_0

$I = I_0 e^{(\beta S - \gamma)t}$ を考察する際、 $\beta S - \gamma$ について考えればよい。このとき、**未感染人口 S** が全体人口 $N (= S + I + R)$ と等しいと考える（初期感染段階）、すなわち $S \approx N$ であるとする。 $\beta N - \gamma = 0$ であるとする、 $\frac{\beta}{\gamma} N = 1$ と与えられる。ここで現れる式を

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} N$$

と定義し、これを**基本再生産数**と呼ぶ。

この基本再生産数 R_0 とは人口学、疫学など幅広く現れ、感染症数理モデルにおいても重要な考え方になる。今回の $I = I_0 e^{(\beta S - \gamma)t}$ を考察すると、 $R_0 > 1$ であれば感染拡大し、 $R_0 < 1$ であれば自然消滅するという、感染拡大に関するパラメータとなる[2]。

SIRモデルの問題点

▶ 閉ざされた系であること

→特に、未感染人口と感染人口において外部への流入、流出を考慮していない。すなわち $S + I + R = N$ (一定)としているということである。

▶ 潜伏感染期間

→一般的に感染症には潜伏感染期間が存在し、その考慮が考慮できていない。また、潜伏感染期間 E としてSEIRモデルというものがある[3]。

▶ 治癒者の再感染

→治癒者が再感染する可能性を考えなければならない。

参考文献

[1] 小林鉄郎, 西浦博, 感染症数理モデル入門, 数学セミナー 59(9), 2020-09, pp.14-19

[2] 稲葉寿, 基本再生産数, 東京大学大学院理学系研究科・理学部, 閲覧日
2020/10/21

< <https://www.s.u-tokyo.ac.jp/ja/story/newsletter/keywords/07/01.html> >

[3] 島村勲, 原子物理やにとっての感染数理モデル, 原子衝突学会誌「しょうとつ」,
17(4), 2020-7, pp.71-77