

統計物理学と感染症数理モデル

～武漢肺炎の伝播～

中央大学 理工学部物理学科

17D2102039D 加藤大貴



研究の目的

2020年1月末、中国武漢市で発生した新型コロナウイルス⁽¹⁾はまたたく間に世界中に広まり人々を震撼させ、多くの人々の生活に影響を及ぼした。私自身、大学の授業がすべてオンラインで行われるなど生活が大きく変化した。特に就職活動においては説明会や面接がほとんどオンラインとなり中には最終面接までオンラインでおこなわれるものもあった。理系学生であり物理学を専攻する私が今まで学んできたことを少しでも今回のような感染症問題に対して活かしたいと思い今回のテーマにした。

以下、感染モデルの理解に必要なポアソン分布と分枝過程のモデルの説明をしてシミュレーションの結果を記す。

ポアソン分布

一定時間内にランダムなイベントが何回発生するか」を表す分布。

確率関数は

$$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

単位時間当たり平均 λ 回起こるようなランダムなイベントが単位時間に k 回発生する確率を表す式である。

またポアソン分布の期待値は $E(k)$ とすると定義式より

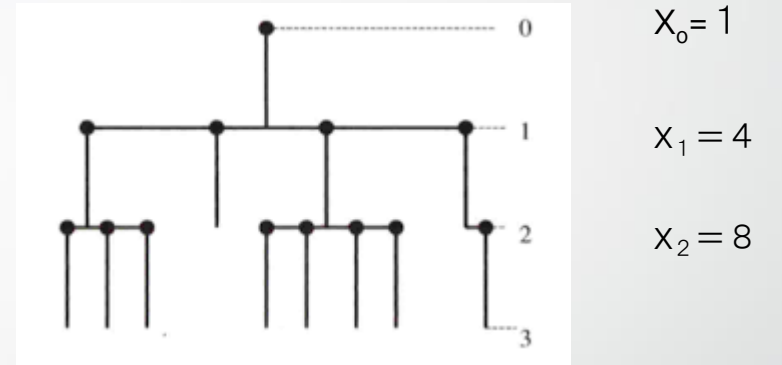
$$\begin{aligned} E(k) &= \sum_{i=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda \because \text{マクローリン展開より } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} \end{aligned}$$

また分散の値は $V(k)$ とすると分散の公式より $V(k) = E(k^2) - E(k)^2 = \lambda$ となる

分枝過程(branching process)

ある有限の世代の後に個体が存在しない、消滅の確率をもとめることができる

- 定義
 - ・ 世代 n において各個体はある確率分布 P_k に従って Y_n の子を生み出す。⁽²⁾
 - ・ 子の生成は他の全ての個体と独立である。⁽²⁾
 - ・ 全ての個体において同じ確率分布が適用される。⁽²⁾



X_n の確率母関数 $h_n(t)$ は以下の式で与えられる

$$h_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(n) t^k \quad (2)$$

- 確率母関数について
確率変数 X がゼロ以上の離散値を取るとき、 t^X の期待値を確率母関数という。

確率母関数から、確率変数の期待値や分散を求めることができる。

分枝過程を用いたウイルスの伝播の計算

case1

分枝過程を用いて、1人の感染者が新たに入国した際に、日本で大規模感染流行が起こる確率を計算する。1人の感染者によって引き起こされる二次感染者の数が負の二項分布に従うと仮定すると流行が起こらない確率を q とすると q は次の方程式を満たす。⁽³⁾

$$q = \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{\kappa}(1-q)\right)^\kappa}$$

ここでの κ は1人の感染者が生み出す二次感染者数分布のばらつきを表す分散パラメータでありここでは0.1とする。また R は1人の感染者が生み出す二次感染者数でここでは1.6と仮定する。⁽³⁾ q の値を計算すると $q = 0.9226$. 流行が起こらない確率は約92.3%となる。よって1人の感染者が新たに入国した際にウイルスが伝播する確率は7.7%となる。

Case 2

複数人の感染者が入国し市中感染に寄与した場合を考える。感染者の流入が互いに独立に起こるとすると n 人の感染者が日本に入国した場合の流行確率は次のようになる。⁽³⁾

$$p = 1 - q^n$$

$n=10$ の場合 $q^{10} = 0.5533$ となり $p = 0.467$ よって大規模流行を引き起こす確率は46.7%となる。このことより、入国する感染者が多くなればなるほど大規模流行が起こる確率が高くなる。

正確なシュミレーション

case2までの確率は現在、日本で実施されている水際対策を考慮していない。

以下水際対策をしている場合の確率を求める。

まず入国者の総数を N とおき、その集団において武漢肺炎に感染している人の割合を b 、水際対策の効果を a とする。このとき水際対策をすり抜けて市中感染に寄与する入国者 n は

$$n = (1 - a) b N \quad \text{と表される。} \quad (3)$$

この場合大規模流行が起こる確率 p は以下のようなになる

$$p = 1 - q^n = 1 - q^{(1 - a) b N}$$

最後に

今回は新型コロナウイルスの伝播について統計物理を絡めて説明したものをまとめた。実際のウイルスの伝播はもっと複雑なもので上に記述した通りにはならないが、数学や物理という一見役に立ってなさそうな分野が新型コロナウイルスという未知なる恐怖に立ち向かうためのヒントを与えることができるという事実を多くの人に知ってもらいたいと思っている。

参考文献

- (1) 中華人民共和国湖北省武漢市における原因不明肺炎の発生について (第3報), 厚生労働省, 閲覧日2020/10/22
https://www.mhlw.go.jp/stf/newpage_o8851.html
- (2) Discrete-Time Branching Processes, 閲覧日2020/10/22
https://sunflower.kuicr.kyoto-u.ac.jp/~takemoto/rindoku_Chpt4_branching_process.pdf
- (3) 安齋麻実・西浦博, 大規模流行の発生確率にまつわる数理, 数学セミナー59(9), 2020-09, pp.30-32