

グリーン関数 (Green function) とは

香取研究室発表担当者

添田 賢瑛

イギリスの数学者であるジョージ・グリーン(George Green)によって発案され、ある時刻 t_0 において位置 \vec{X}_0 に存在する粒子が時刻 t_1 位置に移動する平均回数をグリーン関数(Green function)と呼びます。

以下のように定義すると、

$$G(\vec{X}_1 - \vec{X}_0) = \sum_{t_1=t_0}^{\infty} P(\vec{X}_1, t_1; \vec{X}_0, t_0)$$

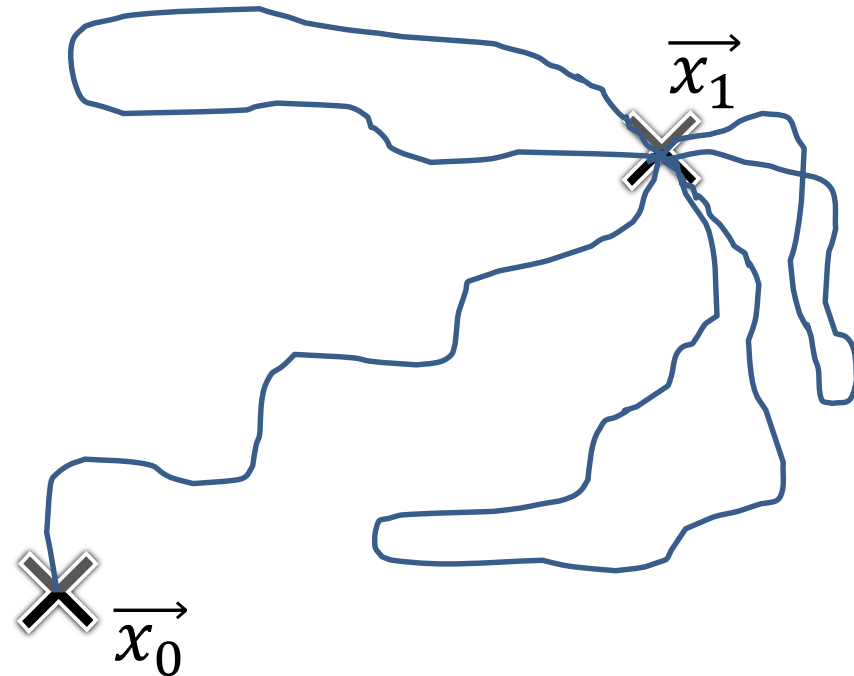
$$= \sum_{t_1=t_0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)}$$

$$\left(\frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu} \right)^{t_1 - t_0}$$

上記の定義式の

左辺 $t_1 = t_0 \sim \infty$ までの確立の総和=延べ回数を意味し、右辺は t_0 で \vec{x}_0 を出発したランダムウォークが t_1 で \vec{x}_1 にいる確率を示しています。

- ランダムウォークとは次に現れる位置が確率的に無作為に決定される運動



まずは、右辺の $\sum_{t_1=t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu} \right)^{t_1-t_0}$ の無限等比級数の和を求める。

上述の式において $t_1 - t_0 = n$ と置くと、 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu} \right)^n$ となる。これは、 $n=0$ の時、初項1で公比 $\frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu}$ である。ここで、**等比数列の和の公式**を用いる。

$$a_n = a_1 r^{n-1}, S_n = (r^n - 1) \quad (r \neq 1)$$

(a_1 :初項, r :公比, a_n :一般項, S_n :初項から n 項までの和)

また、 $|r| < 1$ の時、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{-a_1}{r - 1} = \frac{a_1}{1 - r}$ である。

今回、求めたい無限等比級数の公比は $\frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu}$ で $|r| < 1$

の条件を満たしているため、求めたい無限等比級数

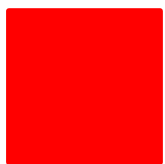
$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu} \right)^n$ の和は $S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu}}$ となり、

$$G(\vec{X}_1 - \vec{X}_0) = \sum_{t_1=t_0}^{\infty} P(\vec{X}_1, t_1; \vec{X}_0, t_0) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)}}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu}}$$

以上より、定義が示せた

しかし、前述で求めた式は次元 d が2次元より多い次元で明確に定義されるもので、仮に次元が $d = 1, 2$ の時には前述の式は 赤外発散 から見えるように 平均回数 は無限に発散。

※ここでの赤外とは波数 k が小さいときの格子



赤外線

紫外線

光の色

長い

短い

波長 λ

小さい

大きい

波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \cdot \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)}}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu}}$ の積分の中の k が小さい時を考える

ため、 $\cos x$ の2次までをテイラー展 ($\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$)

すると、 $\cos k_{\mu} \approx 1 - \frac{1}{2} k_{\mu}^2$ より、求めたい式の積分は

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \cos k_{\mu}} &\approx \frac{1}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu}^d \left(1 - \frac{1}{2} k_{\mu}^2\right)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{d} \cdot d + \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d k_{\mu}^2} = \frac{2d}{\sum_{\mu=1}^d k_{\mu}^2} = \frac{2d}{|\vec{k}|^2} = \frac{2d}{k^2} \quad \text{とな} \end{aligned}$$

り、以上のことから、定義式を綺麗な形にまとめた積分式は

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \cdot \frac{2d}{k^2} \quad \text{となる。}$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \cdot \frac{2d}{k^2}$ は d 次元積分のため、極座標変換して、各次元について調べていきたいと思う。

1次元の場合($d = 1$)

$$I_1 \approx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \cdot \frac{2}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{k^2} dk = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{dk}{k^2} + \int_{-\pi}^0 \frac{dk}{k^2} \right) = \infty$$

2次元の場合($d = 2$)

$$I_2 \approx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \cdot \frac{4}{k^2}$$

ここで、極座標変換($k_x = k \cos \theta$ $k_y = k \sin \theta$)を行うと、ヤコビアンは

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_x}{\partial k} & \frac{\partial k_x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial k_y}{\partial k} & \frac{\partial k_y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -k \sin \theta \\ \sin \theta & k \cos \theta \end{vmatrix} = k(\cos \theta)^2 -$$

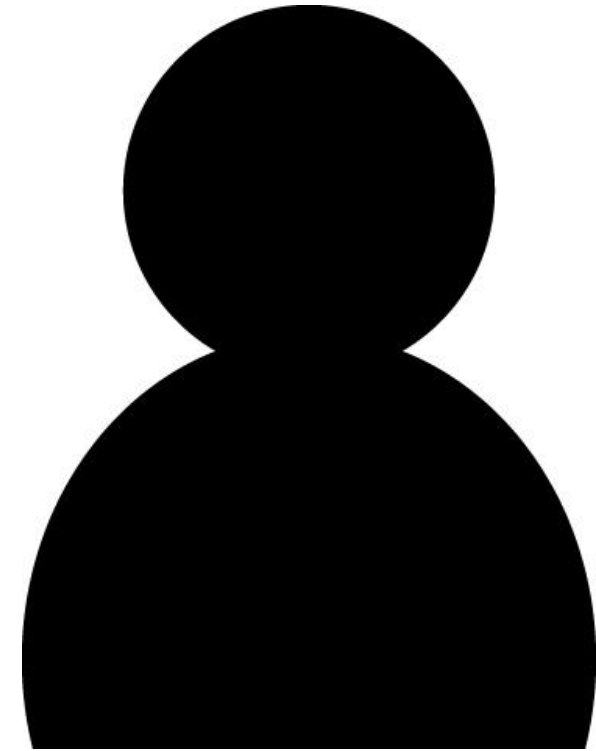
$(-k)(\sin \theta)^2 = k$ 以上より、 $dk_x dk_y = k dk d\theta$ と書き換えられるため2次元の場合での式は

$$I_2 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} k dk \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} dk \frac{1}{k}$$

$d = 1, 2$ において発散することが示せた。

ジョージ・グリーン(*George Green*)とはどのような人物か？

- 1793年にイギリス中部の工業都市ノッティンガムのスネントンにパン屋の一人息子として生まれる。8歳ごろからグッドエーカー学院に通うが、1年で退学して父親の家業であるパン屋の粉挽きの仕事を手伝う
- 高等教育を受けずに父親の稼業を継いだグリーンは独学で勉強をし、1828年に『電磁気理論への数学的解析の応用に関するエッセイ』(*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*)を発表
- 1841年に47歳に死去してしまったこともあってか、発表後20年間も忘れ去られていたが熱力学第二法則(トムソンの原理)の発見者でもあるウィリアム・トムソン(William Thomson)氏によってその有用性が再認識されることになった。



肖像画なども残っていないため、素顔は不明