ブラウン曲線の交叉と次元性

香取研究室　澤谷三四郎　星谷友之

まず、格子上で2つのランダムウォークを考える。いま、2つのウォークがある領域で交わるとすると、交わる確率は以下の不等式で表される。 $P(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\Lambda) \le \sum_{\boldsymbol{z}\in\Lambda} \Pi(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x_1})\Pi(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x_2})$

次に連続化の操作を行う。すなわち、格子の間隔と交叉領域を限りなく小さくすると、ランダムウォークはブラウン曲線に近づく。すると、2つの曲線が交わる確率は、

$$p(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\Lambda) = \lim_{\xi\to\infty} P(\xi\boldsymbol{x_1},\xi\boldsymbol{x_2},\xi\Lambda)$$

$$\le \lim_{\xi\to\infty} \frac{\xi^d}{G(\boldsymbol{0},1)^2} \times \int_\Lambda \mathrm{d}^d\boldsymbol{z} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{d}^d\boldsymbol{q_1}\mathrm{d}^d\boldsymbol{q_2}}{(2\pi)^{2d}} \frac{\exp\{\mathrm{i}\xi[\boldsymbol{q_1}\cdot(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{q_2}\cdot(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{z})]\}}{\left(1-\frac{1}{d}\sum_\mu \cos q_1^2\right)\left(1-\frac{1}{d}\sum_\mu \cos q_2^2\right)}$$

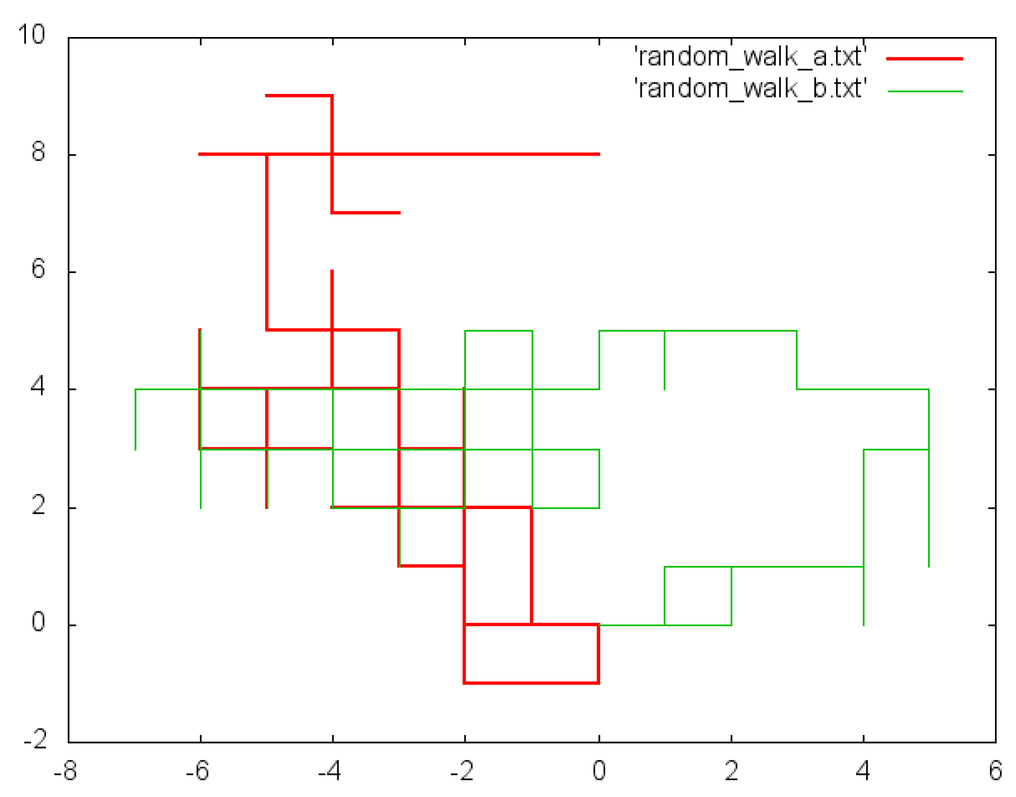
$$\le \lim_{\xi\to\infty} \left(\frac{2d}{G(\boldsymbol{0},1)}\right)^2 \xi^{4-d} \times \int_\Lambda \mathrm{d}^d\boldsymbol{z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^d\boldsymbol{q_1}\mathrm{d}^d\boldsymbol{q_2}}{(2\pi)^{2d}} \frac{\exp\{\mathrm{i}[\boldsymbol{q_1}\cdot(\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{q_2}\cdot(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{z})]\}}{\boldsymbol{q_1^2 q_2^2}}$$

となるから、dが4をこえると、交わる確率は 0 になる。すなわち、空間の次元が4をこえると、2つのブラウン曲線は交わらない。また、3次元空間→2つの曲面は曲線で交わる、4次元空間→2つの曲面は点で交わる、5次元空間以上→2つの曲面は交わらないということから、空間の次元が4をこえると、2つの平面は交わらない。

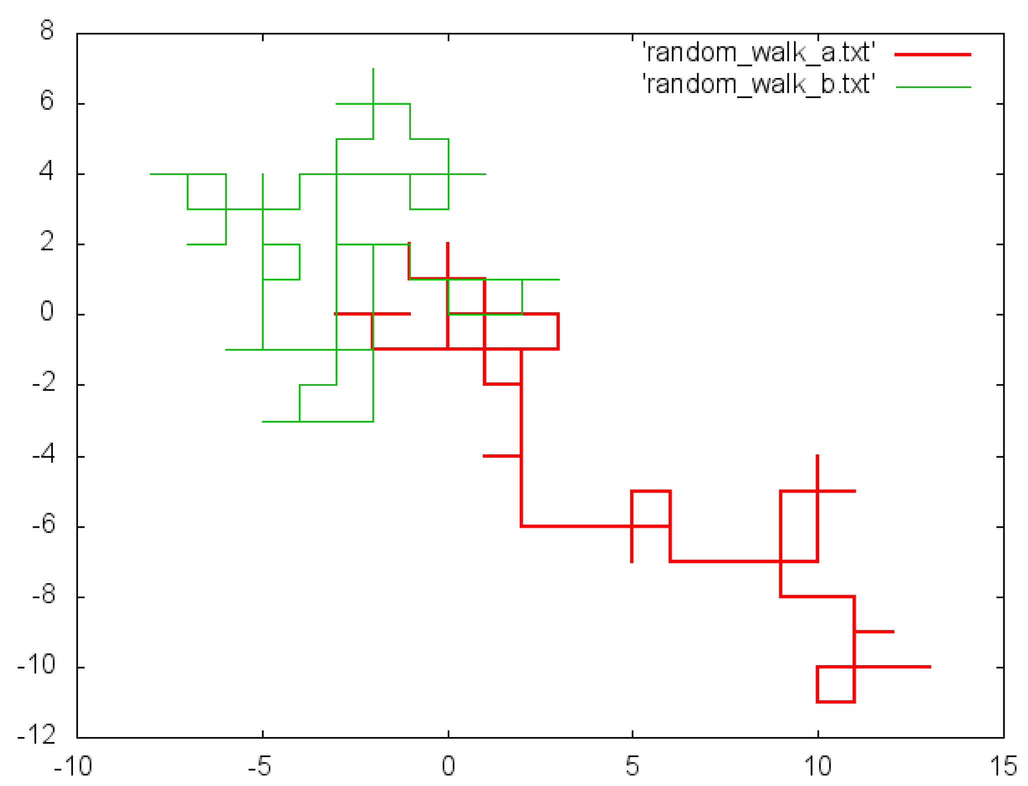
よって、以上を組み合わせて考えると、ブラウン運動の軌跡であるブラウン曲線は、ランダムな曲面のような振舞であるとみなすことができ、ブラウン曲線に固有な次元は2であるといえる。

以下では、2つのランダムウォークに関して、ステップ数と次元数を変えて交点数を調べた。

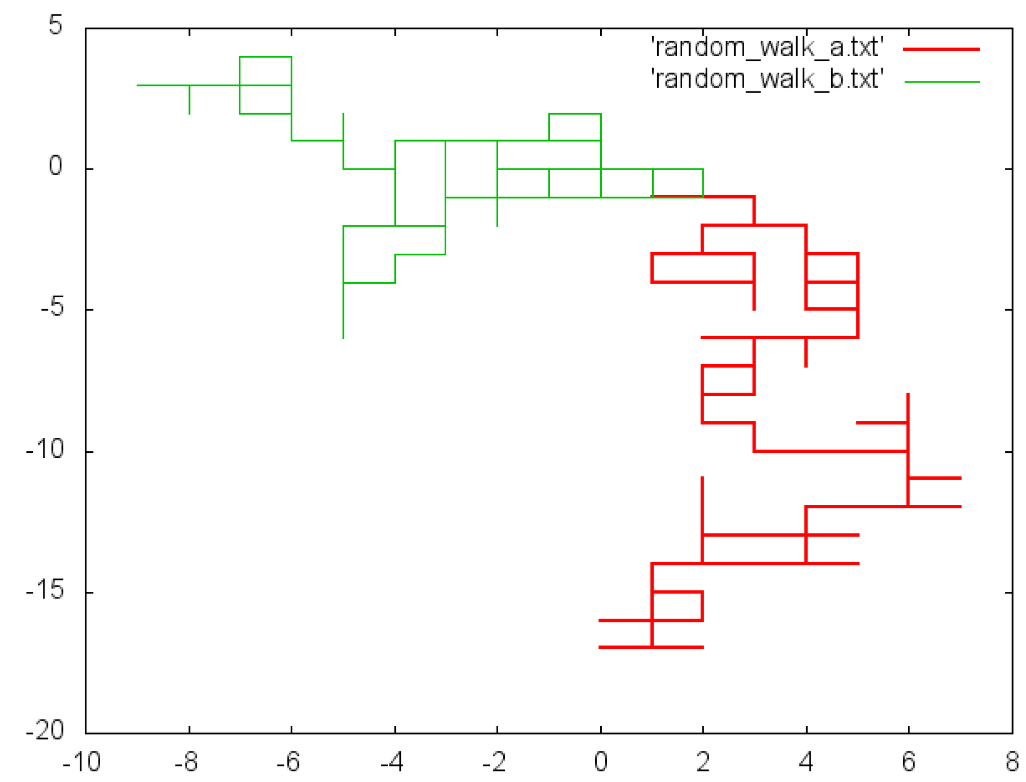
30パターンのうち、グラフ化した結果は18パターンで、残り12パターンは結果のみを表に示した。



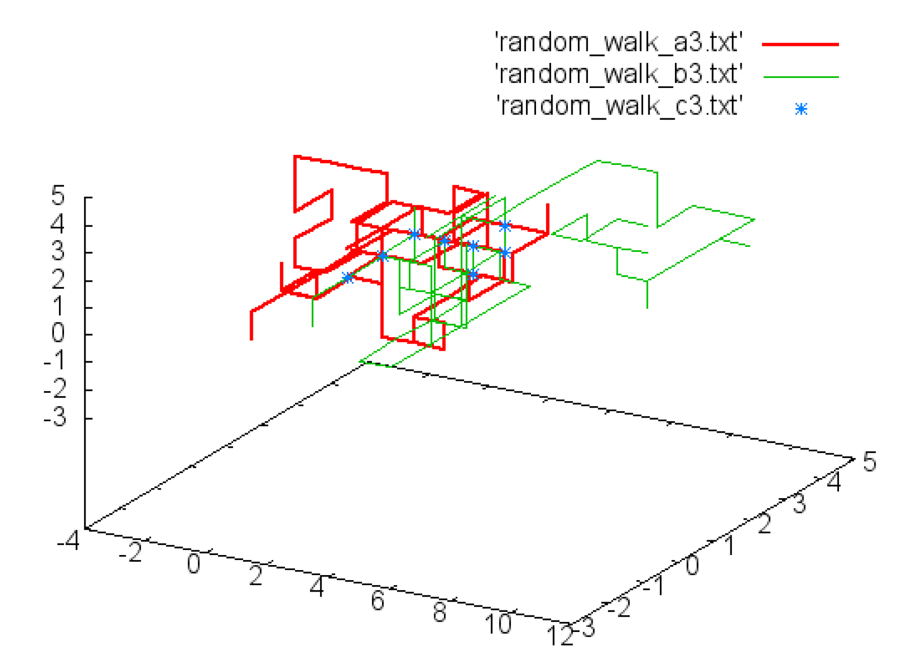
100ステップ　2次元　始点(0,0),(0,0)　交点123個



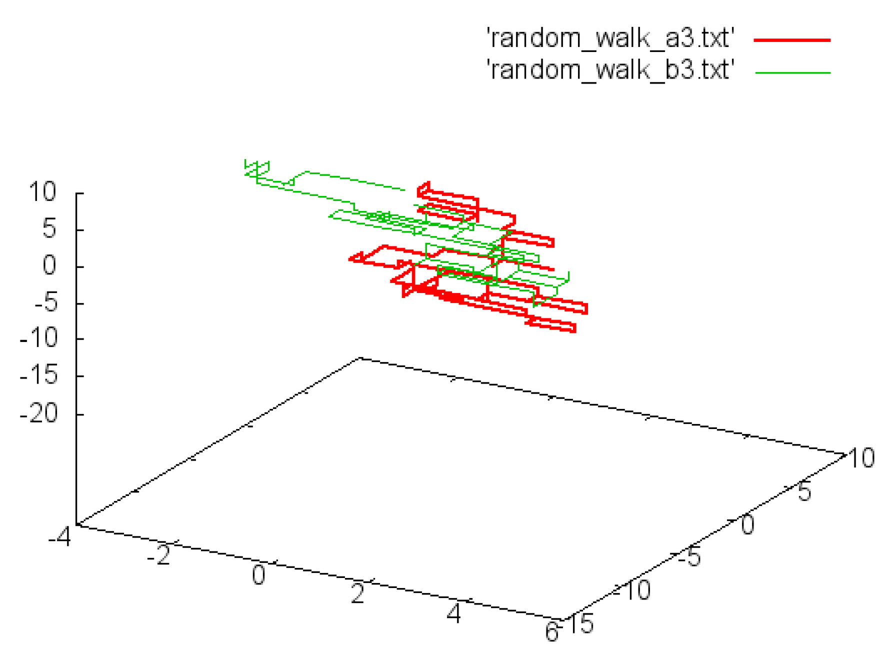
100ステップ　2次元　始点(1,0),(0,1)　交点32個



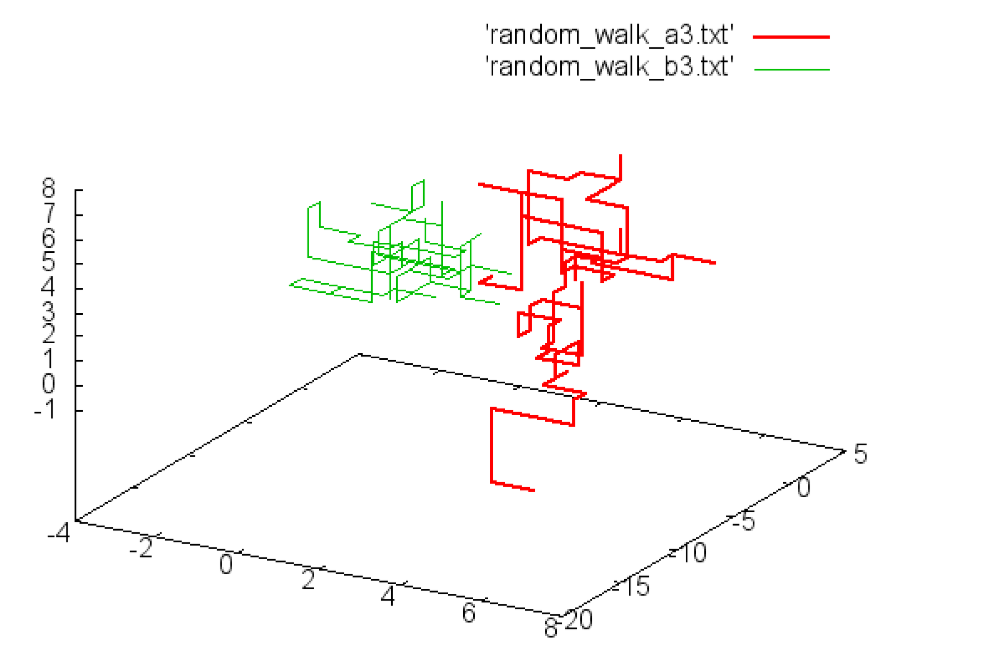
100ステップ　2次元　始点(1,-1),(-1,1)　交点4個



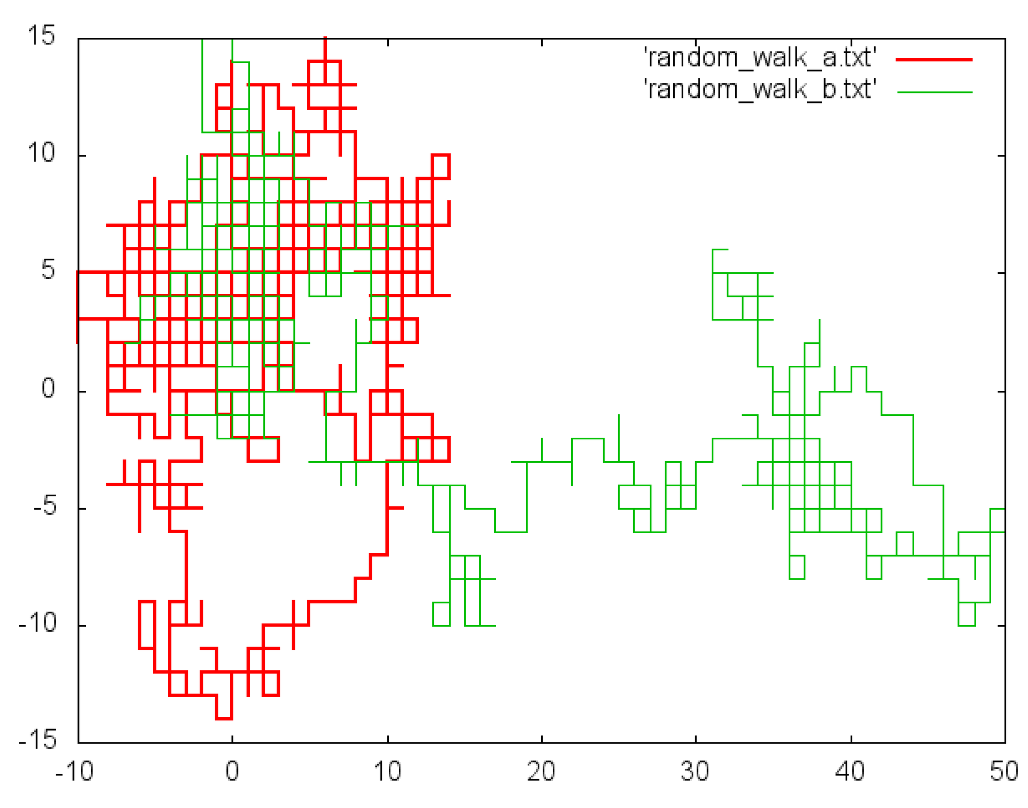
100ステップ　3次元　始点(0,0,0),(0,0,0)　交点15個



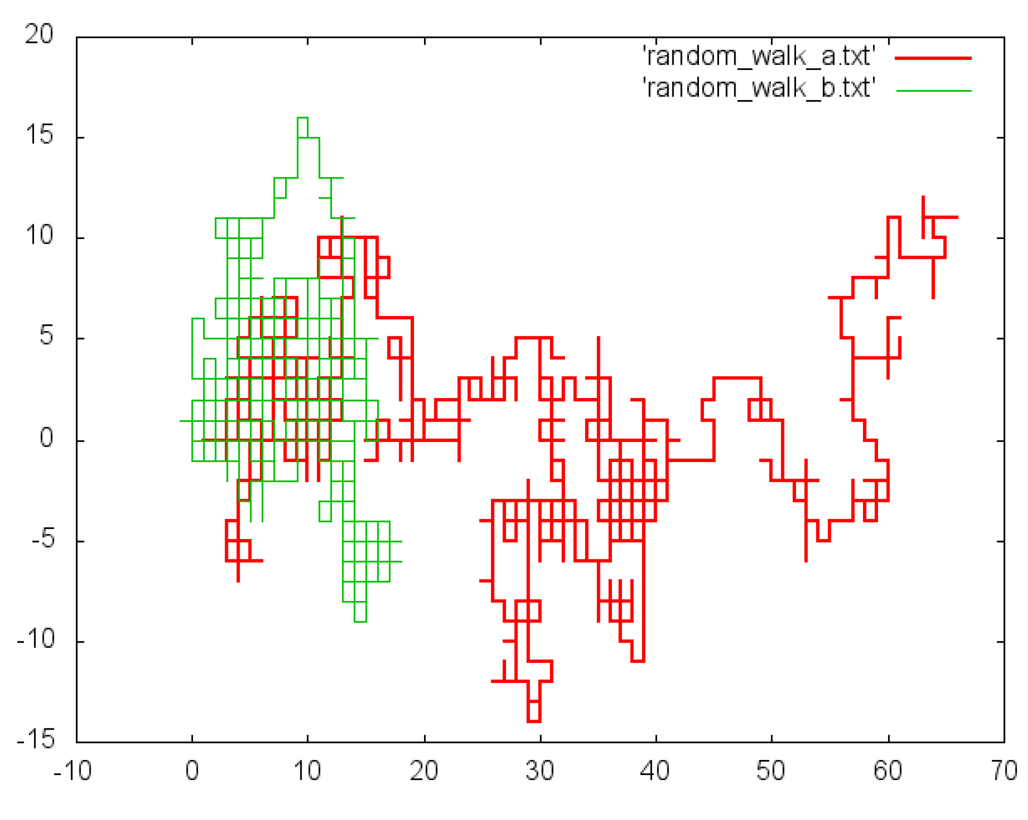
100ステップ　3次元　始点(1,-1,0),(-1,1,0)　交点0個



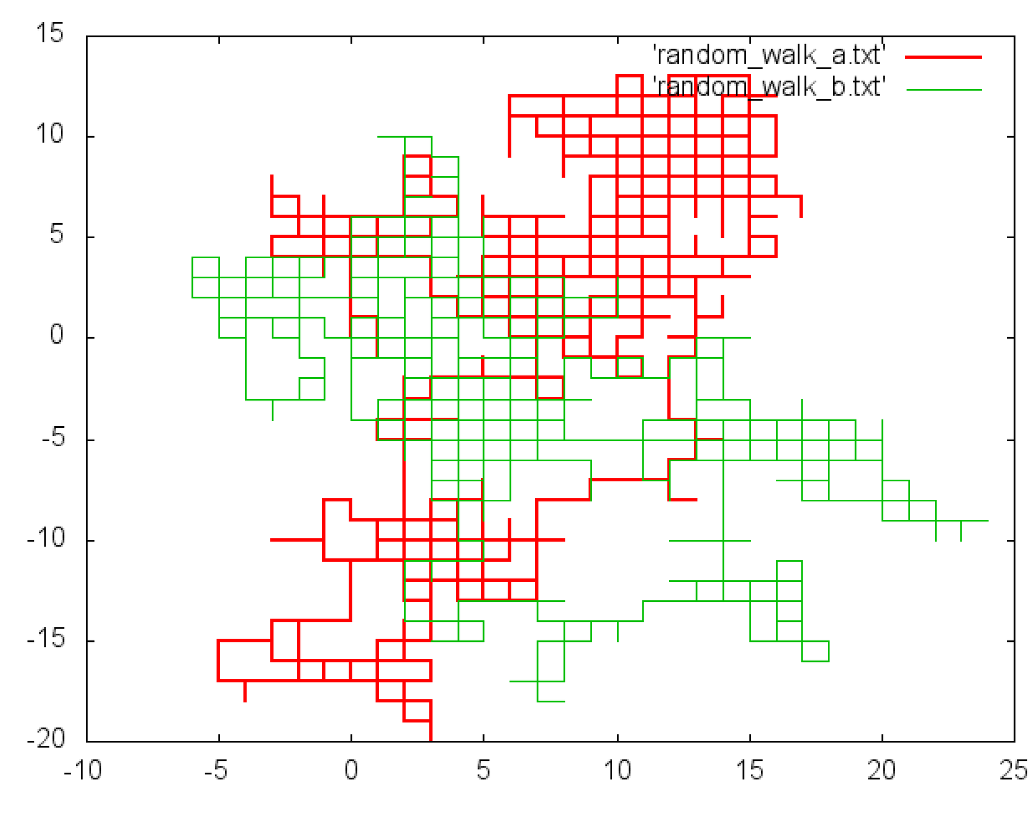
100ステップ　3次元　始点(1,-1,1),(-1,1,-1)　交点0個



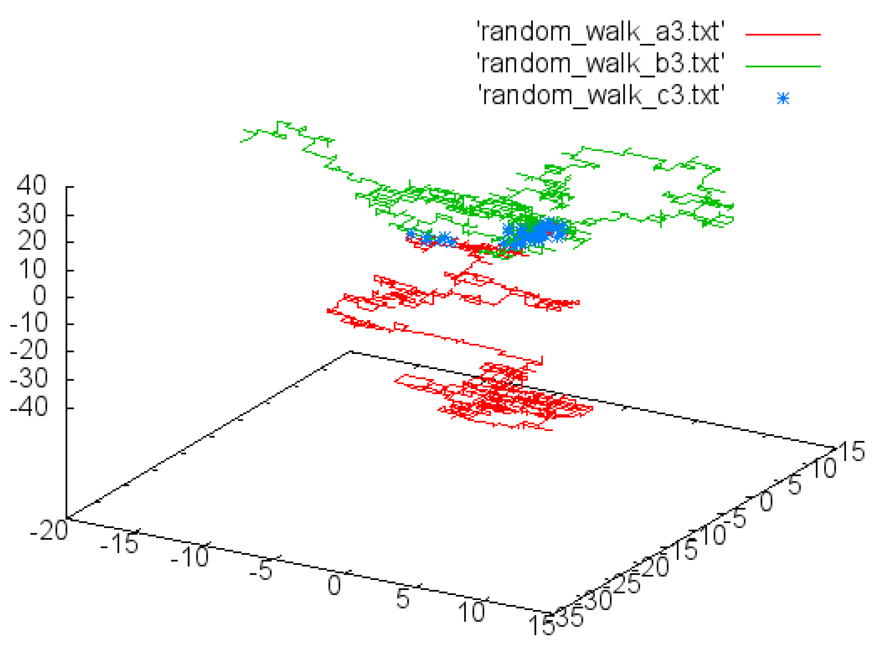
1000ステップ　2次元　始点(0,0),(0,0)　交点1473個



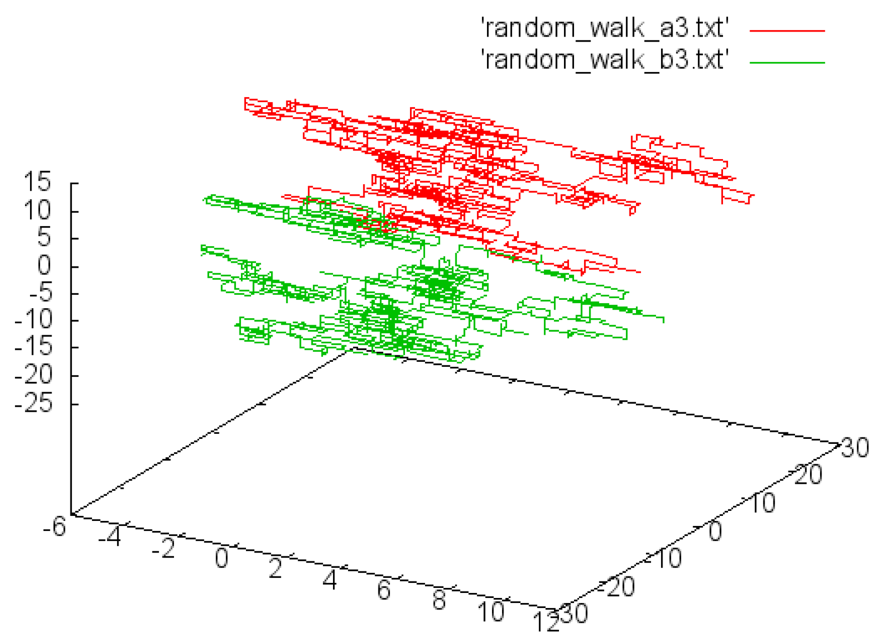
1000ステップ　2次元　始点(1,0),(0,1)　交点1378個



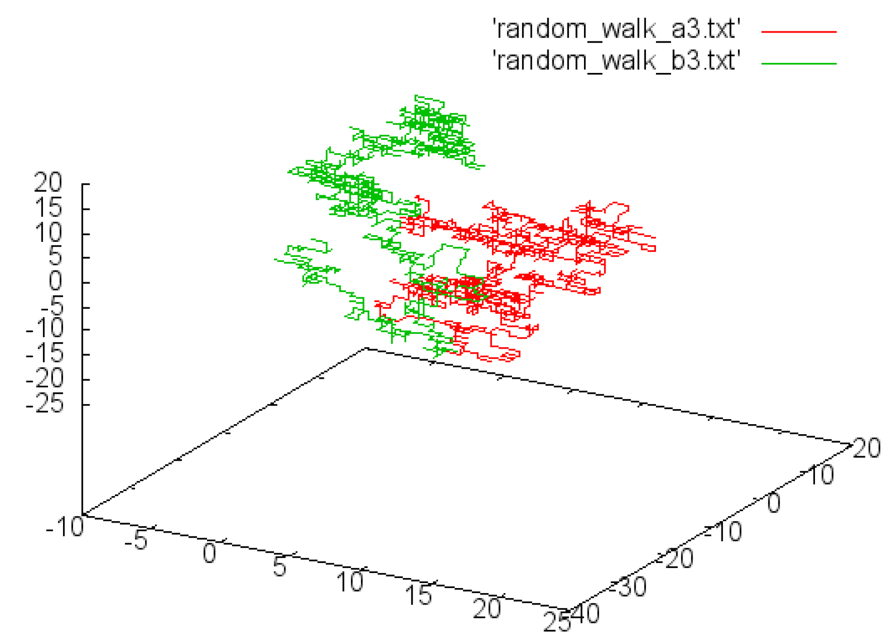
1000ステップ　2次元　始点(1,-1),(-1,1)　交点836個



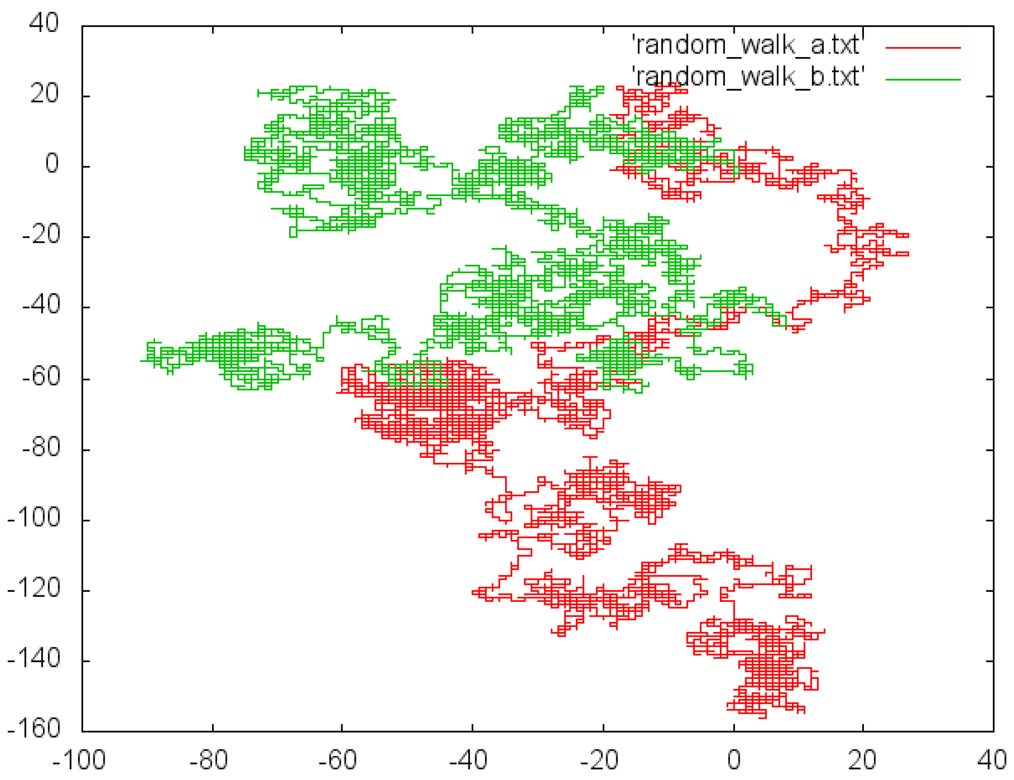
1000ステップ　3次元　始点(0,0,0),(0,0,0)　交点143個



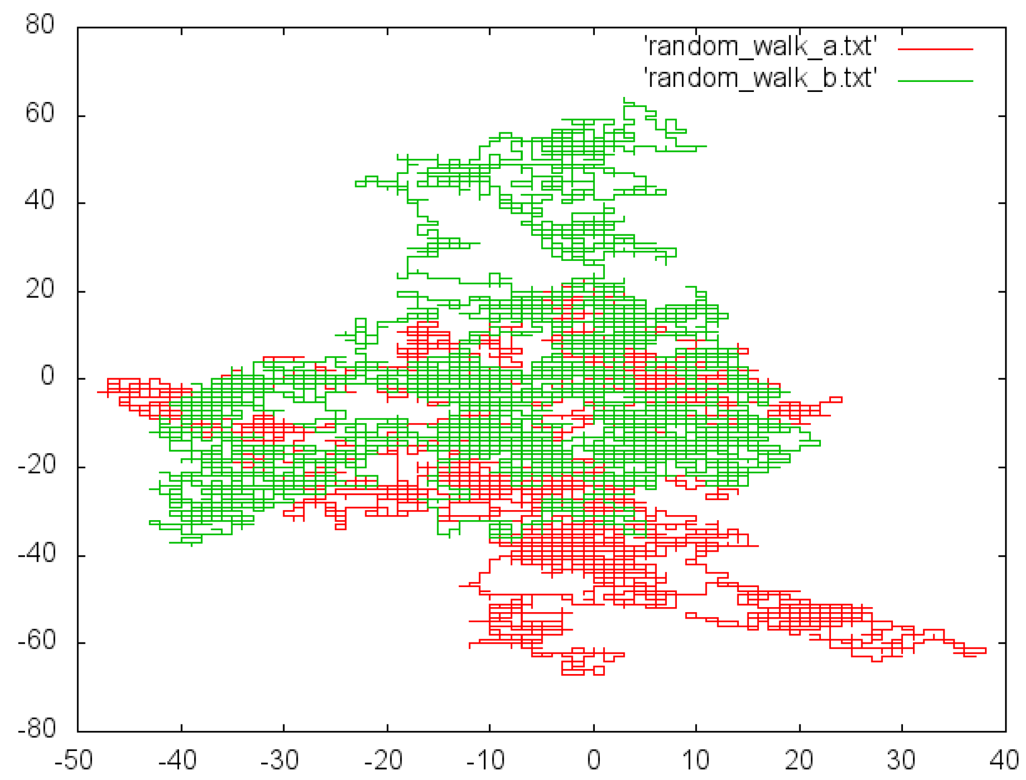
1000ステップ　3次元　始点(1,-1,0),(-1,1,0)　交点0個



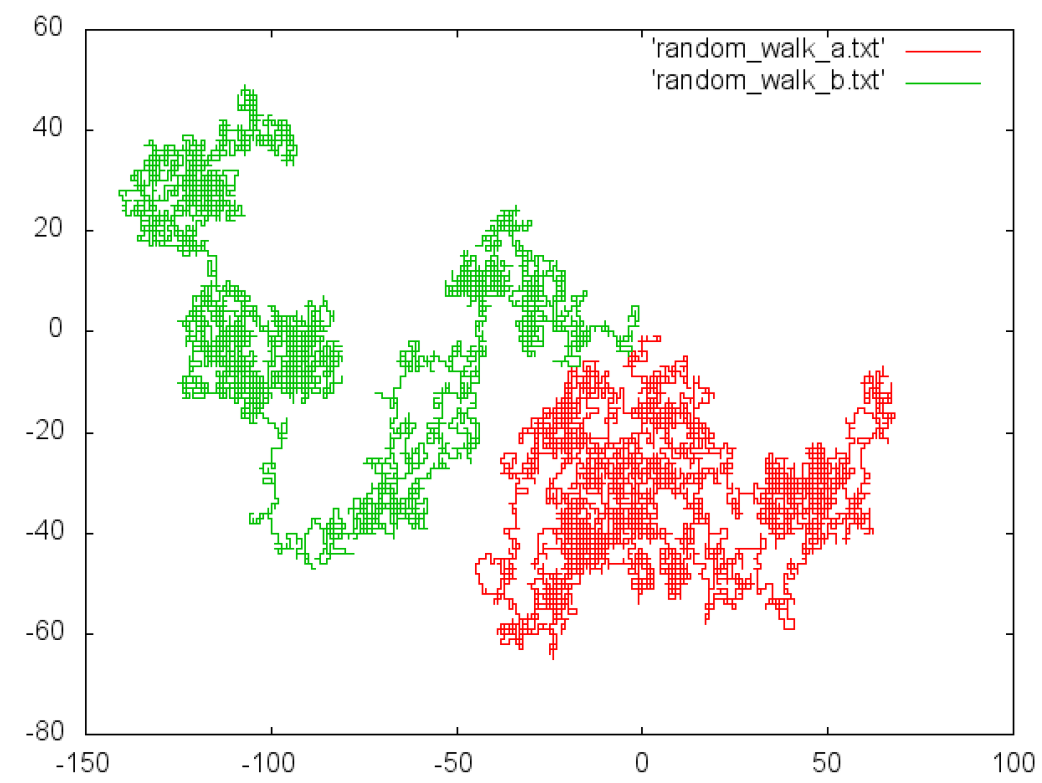
1000ステップ　3次元　始点(1,-1,-1),(-1,1,-1)　交点0個



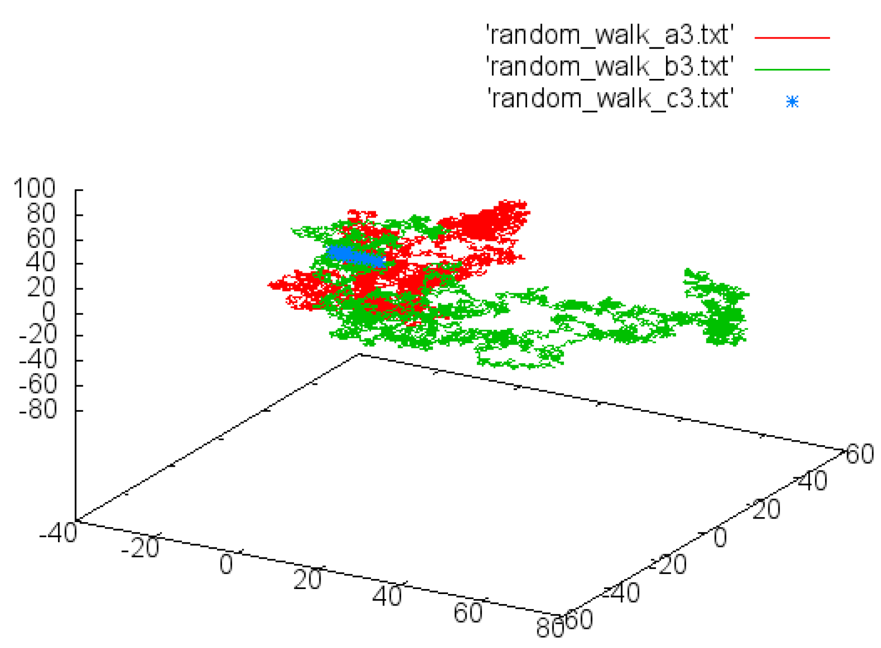
10000ステップ　2次元　始点(0,0),(0,0)　交点3433個



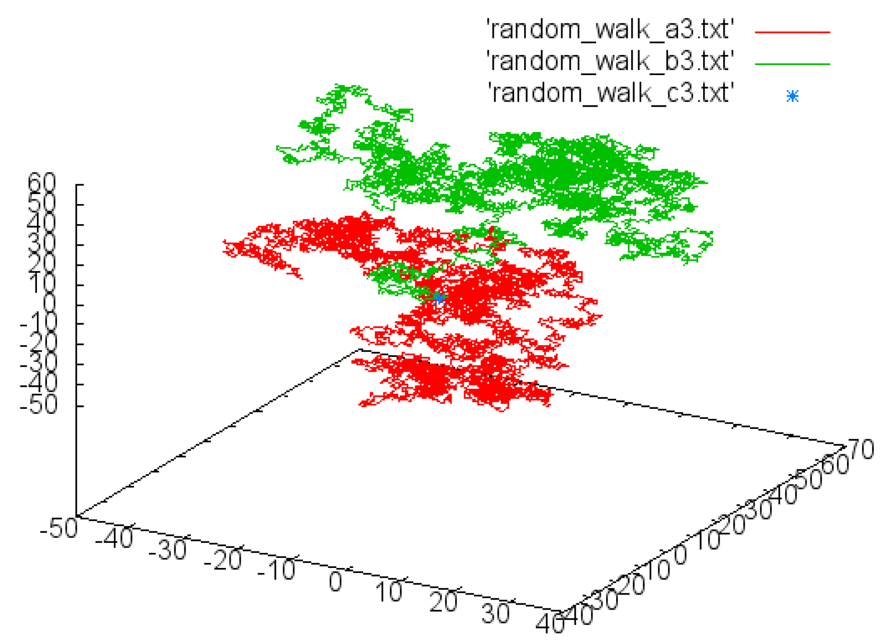
10000ステップ　2次元　始点(1,0),(0,1)　交点20354個



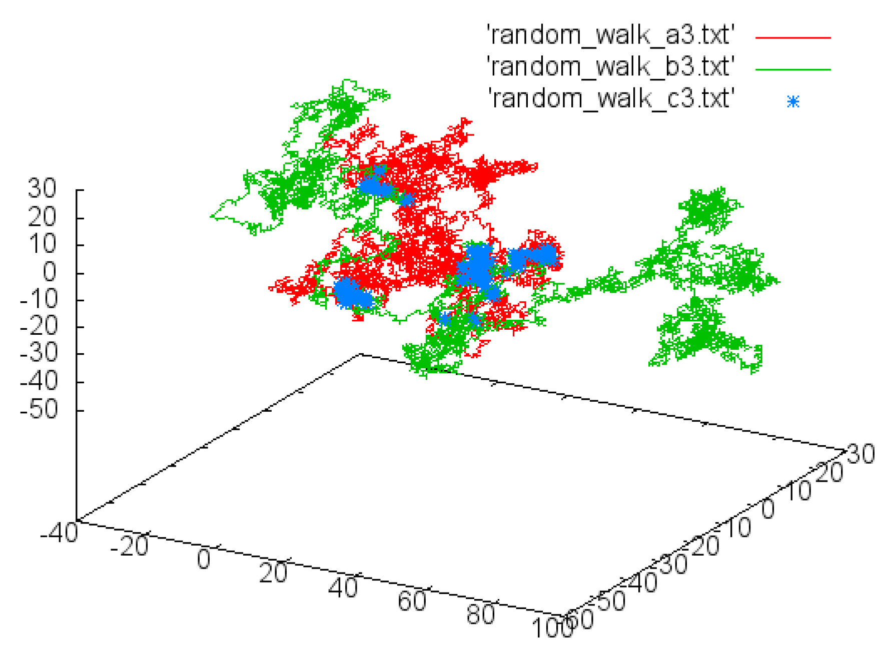
10000ステップ　2次元　始点(1,-1),(-1,1)　交点8個



10000ステップ　3次元　始点(0,0,0),(0,0,0)　交点45個



10000ステップ　3次元　始点(1,-1,0),(-1,1,0)　交点4個



10000ステップ　3次元　始点(1,-1,1),(-1,1,-1)　交点337個

ステップ数	次元数	始点	交点数
100	2	(2,2),(3,3)	106
100	2	(1,2),(2,1)	112
10000	2	(1,2),(2,1)	3358
100	3	(1,2,3),(3,2,1)	11
1000	3	(1,2,3),(3,2,1)	52

ステップ数	次元数	始点	交点数
100	4	(1,2,3,4),(4,3,2,1)	0
1000	4	(1,2,3,4),(4,3,2,1)	0
10000	4	(1,2,3,4),(4,3,2,1)	2
10000	4	(0,0,0,0),(0,0,0,0)	0
100	5	(1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1)	0
1000	5	(1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1)	0
10000	5	(1,2,3,4,5),(5,4,3,2,1)	0

今回のシミュレーションでは、高々10000ステップ程度までのランダムウォークなので、低次元でも交点数が0になってしまったり、始点同士が離れているほうが近くにいるよりも交点数が多いといった結果も現れた。
しかし結論として、次元が4をこえると、交点数は確実に0となっている。

参考文献：Itzykson,Drouffe "Statistical Field Theory" Cambridge University Press (1989)