ブラウン運動における経路積分

まず二次元平面におけるブラウン運動を考えます。位置を x ステップ数を t とします。
座標(x_0, t_0)に存在する粒子が(x_1, t_1)に移動する確率は、

$$\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0) = \frac{\text{ステップ数 } t_1 - t_0 \text{ 間で } x_0 \text{ と } x_1 \text{ を結ぶ経路本数}}{\text{ステップ数 } t_1 - t_0 \text{ 間で } x_0 \text{ を始点とする経路本数}}$$ と表せます。

d 次元の格子点の数を 2d 個とすると、分母は$(2\mathrm{d})^{t_1-t_0}$となります。ここで d 次元空間における確率の式を用い p を求めます。簡単のために d= 1とすると、

$$\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\cdot(x_1-x_0)} (\cos k)^{t_1-t_0}$$

となり、$\cos k = \frac{e^{ik}+e^{-ik}}{2}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ik\cdot(x_1-x_0)} \left(\frac{e^{ik}+e^{-ik}}{2}\right)^{t_1-t_0} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2^{t_1-t_0+1}\cdot\pi} e^{ik\cdot(x_1-x_0)} \sum_{m=0}^{t_1-t_0} \binom{t_1-t_0}{m} e^{ikm} \cdot e^{-ik(t_1-t_0-m)} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2^{t_1-t_0+1}\cdot\pi} e^{ik\cdot(x_1-x_0)} \sum_{m=0}^{t_1-t_0} \frac{(t_1-t_0)!}{m!(t_1-t_0-m)!} e^{ik(2m-t_1+t_0)} \\
&= \sum_{m=0}^{t_1-t_0} \frac{1}{2^{t_1-t_0+1}\cdot\pi} \frac{(t_1-t_0)!}{m!(t_1-t_0-m)!} \int_{-\pi}^{\pi} dk \cdot e^{ik(2m-t_1+t_0)}
\end{aligned}$$

となります。
$\int_{-\pi}^{\pi} dk \cdot e^{ik(2m-t_1+t_0)} = 0$のとき $\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0) = 0$　であります。
ここで $x_1 - x_0 + 2m - t_1 + t_0 = 0$ で $e^{ik(2m-t_1-t_0)} = 1$ として $\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0)$を書き換えると

$$\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0) = \sum_{m=0}^{t_1-t_0} \frac{1}{2^{t_1-t_0}} \frac{(t_1-t_0)!}{m!(t_1-t_0-m)!} \delta_{x_1-x_0-t_1-t_0+2m,0}$$ となる。

この式をさらに書き換えると

$$\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0) = \frac{1}{(2d)^{t_1-t_0}} \sum_{t=1\cdots t_1-t_0-1}^{x(t)} \prod_{t=0}^{t_1-t_0-1} \delta_{1,\sum_{\mu=1}^{d}|x_\mu(t+1)-x_\mu(t)|}$$ となります。

この式をさらにまとめてみる。
位置x_0からx_1までの経路の足しあわせを w とする。格子結合の境界を∂wとし、w上の結合数が奇数の座標を$\{x_1, x_0\}$とすると、

$$\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0) = \sum_{|w|=t_1-t_0}^{w,\partial w=\{x_0,x_1\}} \left(\frac{1}{2d}\right)^{|w|}$$

と書き直せる。グリーン関数で一般化すると、

$\mathrm{G}(x_1 - x_0, \lambda) = \lambda \sum_{w, \partial w = \{x_0, x_1\}} (\frac{\lambda}{2d})^{|w|}$　　となる。

ここで、

$\mathrm{p}(x_1, t_1; x_0, t_0) = \sum_{|w| = t_1 - t_0}^{w, \partial w = \{x_0, x_1\}} e^{\ln \frac{1}{2d} |w|}$

$= \sum_{|w| = t_1 - t_0}^{w, \partial w = \{x_0, x_1\}} e^{(-\ln 2\mathrm{d})|w|}$

$= \sum_{|w| = t_1 - t_0}^{w, \partial w = \{x_0, x_1\}} e^{-A|w|}$　　　$(\ln 2d = A)$

この指数関数の項は経路からの重みを表しています。このようにすべての経路に重み付けをして足し合わせることにより、ある場所で粒子の見つかる確率を求めることができます。

西村祐輝