経路積分

香取研究室　学部 4 年　山本裕昭

・経路積分の発想

始点と終点を結び，無数に分布していると考え，それらの無数の経路の合成を考える．

図1は，点 x_i から点 x_f までとある点 x を経由して，移動する確率p（$\vec{x},t{:}\overrightarrow{x_i},t_i$）と，$x$ から x_f へ移動する確率p（$\overrightarrow{x_f},t_f{:}x,t$)の積である．

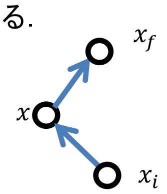

図 1 確率pの積

無数に存在する点 x を経由すると考えると，以下の式で表され，その様子を図2に示す．

$$\int d^d\vec{x}\,\mathrm{p}\,(\overrightarrow{x_f},t_f{:}x,t)\,\mathrm{p}\,(\vec{x},t{:}\overrightarrow{x_i},t_i) \qquad (1)$$

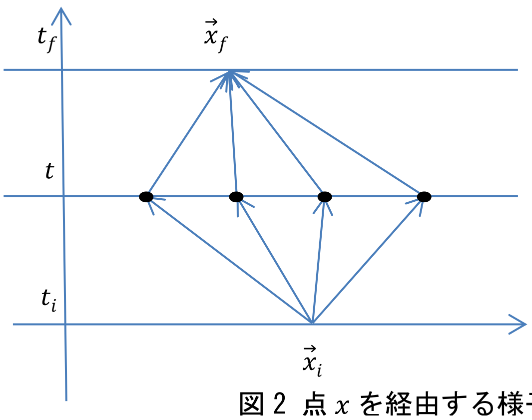

図 2 点 x を経由する様子

分割して考える．これをさらに経由する回数をn回にし，n分割して考えると，

$$\mathrm{p}\,(\vec{x}_f,t_f{:}\vec{x}_f,t_i) = \int d^d\vec{x}\,\mathrm{p}\,(\vec{x}_f,t_f{:}\vec{x}_{f-1},t_{f-1})\int d^d\vec{x}\,\mathrm{p}\,(\vec{x}_{f-1},t_{f-1}{:}\vec{x}_{f-2},t_{f-2})\cdots\cdots\mathrm{p}\,(\vec{x}_{i+1},t_{i+1}{:}\vec{x}_i,t_i) \qquad (2)$$

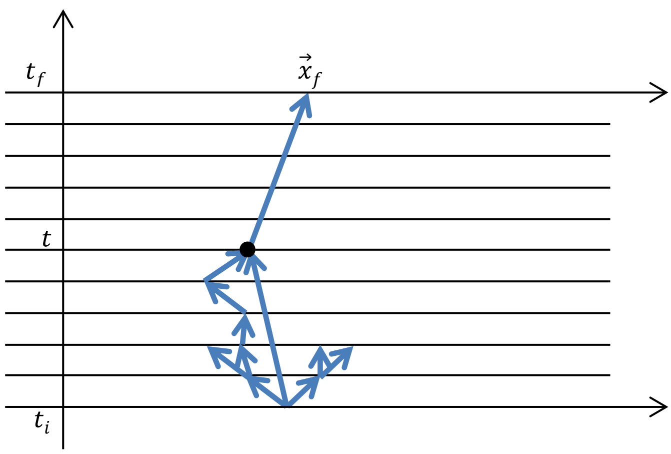

図 3 n回分割した時の様子

D次元における，点x_iから点x_fへ移動する確率pは，以下のようになる．

$$\mathrm{p}\,(\vec{x}_f, t_f : \vec{x}_i, t_i) = \frac{1}{[4\pi(t_f - t_i)]^{d/2}} \exp\left\{\frac{(\vec{x}_f - \vec{x}_i)^2}{4(\vec{t}_f - \vec{t}_i)}\right\} \qquad (3)$$

この式を(2)代入する．

$$\mathrm{p}\,(\vec{x}_f, t_f : \vec{x}_i, t_i)$$

$$= \int \frac{d^d x_{n-1}}{[4\pi(t_n - t_{n-1})]^{\frac{d}{2}}} \exp\left[\frac{-(\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1})^2}{4(t_n - t_{n-1})}\right]$$

$$\times \int \frac{d^d x_{n-1}}{[4\pi(t_{n-1} - t_{n-2})]^{\frac{d}{2}}} \exp\left[\frac{-(\vec{x}_{n-1} - \vec{x}_{n-2})^2}{4(t_{n-1} - t_{n-2})}\right]$$

$$\times \ldots$$

$$\times \int \frac{d^d x_1}{[4\pi(t_1 - t_0)]^{\frac{d}{2}}} \exp\left[\frac{-(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2}{4(t_2 - t_1)}\right] \times \frac{1}{[4\pi(t_1 - t_0)]^{\frac{d}{2}}} \exp\left[\frac{-(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2}{4(t_2 - t_1)}\right]$$

これより，確率pは以下の式で表せる．

$$\mathrm{p}\,(\vec{x}_f, t_f : \vec{x}_i, t_i) = \int \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^d x_j^3}{[4\pi(t_{j+1} - t_j)]^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{[4\pi(t_1 - t_0)]^{d/2}} \times \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\vec{x}_{j+1} - \vec{x}_j)^2}{(t_{j+1} - t_j)}\right] \qquad (4)$$

式(4)を次の形に書き換える．

$$\frac{(dx)^2}{dt} = dt\left(\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\right)^2$$

$$p(\vec{x}_f, t_f ; \vec{x}_i, t_i) = \int_{\substack{x(t_i) = x_i \\ x(t_f) = x_f}} D_x(t) exp\left[-\frac{1}{4}\int_{t_i}^{t_f} dt\dot{x}^2\right] \qquad (5)$$

上記の式(5)のように，離散的であった値が連続となることがわかる．
図４のように経路を足し合わせた値が表される．

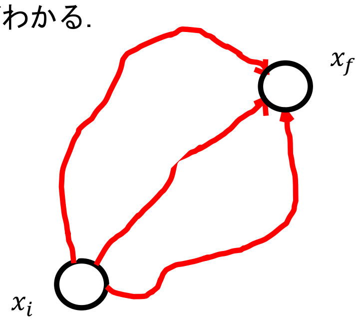

図４　経路図

参考文献

C. Itzykson, J. M. Drouffle Cambridge University Press (1989)

Statistical Field Theory

Cambridge University Press (1989)