

時間発展する  
ランダム行列固有値模型の  
揺動と相関  
(part 1/4)

香取眞理(中央大学理工学部)  
KATORI, Makoto

2014年度夏学期 第10回 駒場物性セミナー

2014年7月25日(金) 16:30-18:00

東京大学駒場キャンパス 16号館 827号室

- [KT10] M. Katori, H. Tanemura, Non-equilibrium dynamics of Dyson's model with an infinite number of particles, *Commun. Math. Phys.* **293** (2010) 469-497.
- [KT13] M. Katori, H. Tanemura, Complex Brownian motion representation of the Dyson model, *Electron. Commun. Probab.* **18** (4) (2013) 1-16.
- [K14] M. Katori, Determinantal martinagles and noncolliding diffusion processes, *Stochastic Process. Appl.* **124** (2014) 3724-3768.

# 1. Introduction

## 1.1 ランダム行列とその固有値分布 (GUE)

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $i = \sqrt{-1}$
- $N \times N$  エルミート行列に値をもつランダム行列

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} + i\tilde{X}_{12} & X_{13} + i\tilde{X}_{13} & \cdots & X_{1N} + i\tilde{X}_{1N} \\ X_{12} - i\tilde{X}_{12} & X_{22} & X_{23} + i\tilde{X}_{23} & \cdots & X_{2N} + i\tilde{X}_{2N} \\ X_{13} - i\tilde{X}_{13} & X_{23} - i\tilde{X}_{23} & X_{33} & \cdots & X_{3N} + i\tilde{X}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{1N} - i\tilde{X}_{1N} & X_{2N} - i\tilde{X}_{2N} & X_{3N} - i\tilde{X}_{3N} & \cdots & X_{NN} \end{pmatrix}$$

- 各成分はそれぞれ**独立**に次のような**正規分布**に従う.

[対角成分]  $X_{jj} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ,  $1 \leq j \leq N$ : 平均 0, 分散  $\sigma^2$

$$P(X_{jj} \in [m_{jj}, m_{jj} + dm]) = p_{\sigma^2}(m_{jj})dm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-m_{jj}^2/2\sigma^2} dm, 1 \leq j \leq N.$$

[非対角成分実部]  $X_{jk} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$ ,  $1 \leq j < k \leq N$ : 平均 0, 分散  $\sigma^2/2$

$$P(X_{jk} \in [m_{jk}, m_{jk} + dm]) = p_{\sigma^2/2}(m_{jk})dm = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-m_{jk}^2/\sigma^2} dm, 1 \leq j < k \leq N.$$

[非対角成分虚部]  $\tilde{X}_{jk} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$ ,  $1 \leq j < k \leq N$ : 平均 0, 分散  $\sigma^2/2$

$$P(\tilde{X}_{jk} \in [\tilde{m}_{jk}, \tilde{m}_{jk} + dm]) = p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk})dm = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-\tilde{m}_{jk}^2/\sigma^2} dm, 1 \leq j < k \leq N.$$

- このランダム行列の実現値（エルミート行列）を

$$M = (M_{jk})_{1 \leq j, k \leq N} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} + i\tilde{m}_{12} & m_{13} + i\tilde{m}_{13} & \cdots & m_{1N} + i\tilde{m}_{1N} \\ m_{12} - i\tilde{m}_{12} & m_{22} & m_{23} + i\tilde{m}_{23} & \cdots & m_{2N} + i\tilde{m}_{2N} \\ m_{13} - i\tilde{m}_{13} & m_{23} - i\tilde{m}_{23} & m_{33} & \cdots & m_{3N} + i\tilde{m}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{1N} - i\tilde{m}_{1N} & m_{2N} - i\tilde{m}_{2N} & m_{3N} - i\tilde{m}_{3N} & \cdots & m_{NN} \end{pmatrix}$$

と書くことにする.

- 実現確率

$$\begin{aligned} P(X \in [M, M + dM]) &= \prod_{j=1}^N \left( p_{\sigma^2}(m_{jj}) dm \right) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left( p_{\sigma^2/2}(m_{jk}) dm \times p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk}) dm \right) \\ &= \prod_{j=1}^N p_{\sigma^2}(m_{jj}) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left( p_{\sigma^2/2}(m_{jk}) \times p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk}) \right) \times dm^N \times dm^{2 \times N(N-1)/2}. \end{aligned}$$

- ここで

$$dm^N \times dm^{2 \times N(N-1)/2} = dm^{N^2} \equiv \mathcal{U}(dM) : N^2 \text{次元実空間 } R^{N^2} \text{の体積要素} \implies d^{N^2}x.$$

- また,

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=1}^N p_{\sigma^2}(m_{jj}) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left( p_{\sigma^2/2}(m_{jk}) \times p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk}) \right) \\
&= \prod_{j=1}^N \frac{e^{-m_{jj}^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \times \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left( \frac{e^{-m_{jk}^2/\sigma^2}}{\sqrt{\pi\sigma}} \frac{e^{-\tilde{m}_{jk}^2/\sigma^2}}{\sqrt{\pi\sigma}} \right) \\
&= \frac{\sigma^{-N^2}}{2^{N/2}\pi^{N^2/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{j=1}^N m_{jj}^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq N} (m_{jk}^2 + \tilde{m}_{jk}^2) \right\} \right].
\end{aligned}$$

である.

- ここで

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N m_{jj}^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq N} (m_{jk}^2 + \tilde{m}_{jk}^2) \\
&= \sum_{j=1}^N m_{jj}^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq N} |m_{jk} + i\tilde{m}_{jk}|^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq N} |m_{jk} - i\tilde{m}_{jk}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |M_{jk}|^2 = \text{tr}(\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M}).
\end{aligned}$$

である.

$$P(X \in [M, M + dM]) = \mu(M) \mathcal{U}(dM),$$

$$\mu(M) = \frac{\sigma^{-N^2}}{c(N)} e^{-\text{tr}M^\dagger M / 2\sigma^2}, \quad c(N) = 2^{N^2/2} \pi^{N^2/2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(N) \equiv N \times N \text{ エルミート行列全体の空間} &\iff N^2 \text{ 次元実空間 } \mathbb{R}^{N^2} \\ \mathcal{H}(N) \text{ の体積要素 } \mathcal{U}(M) &\iff \mathbb{R}^{N^2} \text{ のルベーク測度 } d^{N^2} x \end{aligned}$$

- $\mathcal{H}(N)$  における「平均 0, 分散  $\sigma^2$  の正規分布」の確率密度関数

$$\mu(M) = \frac{\sigma^{-N^2}}{c(N)} e^{-\text{tr}M^\dagger M / 2\sigma^2}$$

比較：  $\mathbb{R}$  上の「平均 0, 分散  $\sigma^2$  の正規分布  $N(0, \sigma^2)$ 」の確率密度関数

$$\mu(x) = p_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} = \frac{\sigma^{-1}}{c(1)} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad c(1) = \sqrt{2\pi}$$

- $U(N) \equiv N \times N$  のユニタリ行列全体の集合
- 任意の  $U \in U(N)$  に対して, 確率  $\mu(M)U(dM)$  はユニタリ変換  $M \rightarrow U^\dagger M U$  の下で不変.
- このような不変性を持つ「 $\mathcal{H}(N)$  における正規分布」をランダム行列理論では

ガウス型ユニタリ統計集団

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

$$\text{GUE}_N(0, \sigma^2)$$

という.

- $\mathcal{H}(N) \simeq \mathbb{R}^{N^2}$  ではあるが,  $\mathbf{X} \in \text{GUE}_N(0, \sigma^2)$  は行列構造をもっている.
- エルミート値ランダム行列  $\mathbf{X}$   
 $\implies$  固有値  $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_N$ .
- $\mathbf{X} \sim \text{GUE}_N(0, \sigma^2)$  のとき

$$P(\Lambda_j \in [\lambda_j, \lambda_j + d\lambda], 1 \leq j \leq N) = g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) d^N \lambda,$$

$$g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) = \frac{\sigma^{-N^2}}{C(N)} e^{-|\vec{\lambda}|^2/2\sigma^2} h_N(\vec{\lambda})^2, \quad C(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j).$$

ここで,

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad |\vec{\lambda}|^2 = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2, \quad e^{-|\vec{\lambda}|^2/2\sigma^2} = \prod_{j=1}^N e^{-\lambda_j^2/2\sigma^2},$$

$$\begin{aligned} h_N(\vec{\lambda}) &= \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\lambda_k - \lambda_j) && \text{差積} \\ &= \det_{1 \leq j, k \leq N} [\lambda_j^{k-1}] && \text{Vandermonde 行列式} \end{aligned}$$



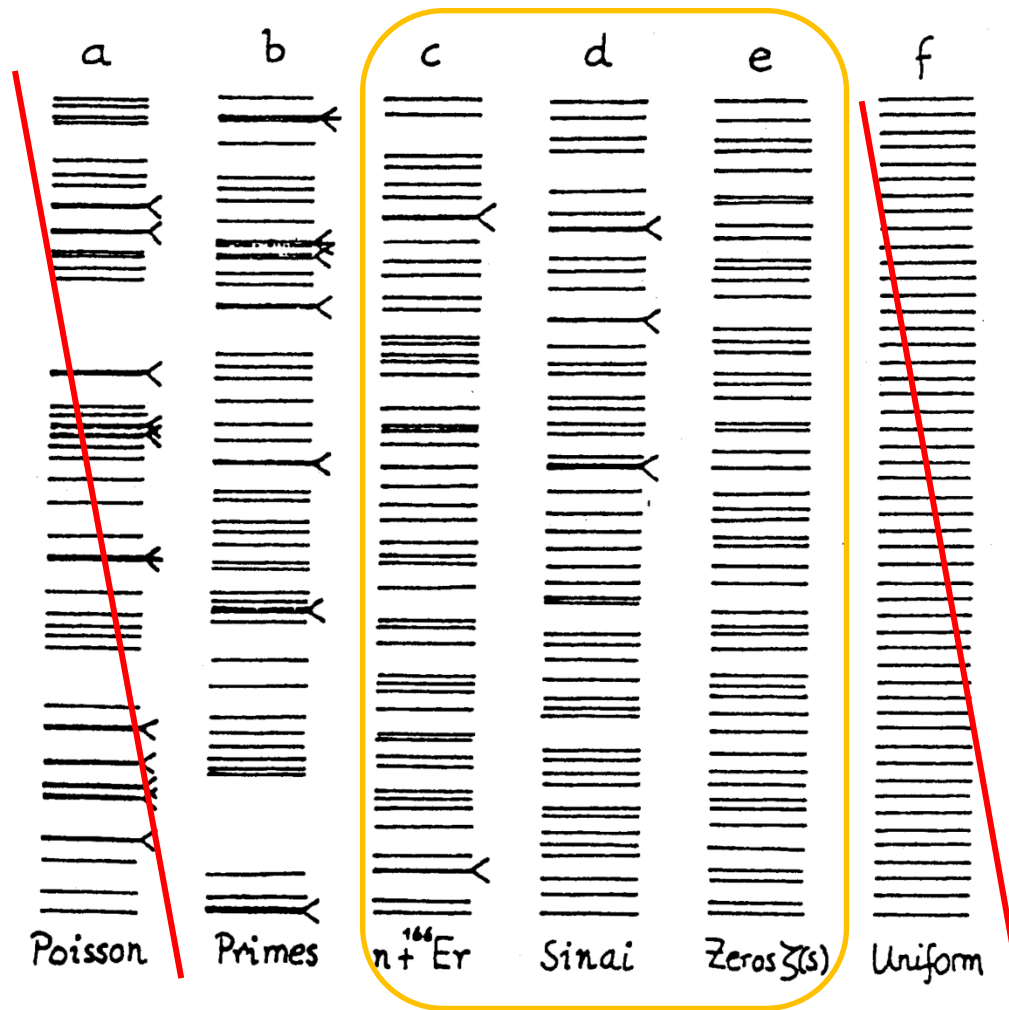
$$P(\Lambda_j \in [\lambda_j, \lambda_j + d\lambda], 1 \leq j \leq N) = g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) d^N \lambda,$$

$$g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) = \frac{\sigma^{-N^2}}{C(N)} e^{-|\vec{\lambda}|^2/2\sigma^2} h_N(\vec{\lambda})^2, \quad C(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j).$$

- すべての対  $(j, k), 1 \leq j < k \leq N$  に対して

$$|\lambda_k - \lambda_j| \searrow 0 \implies h_N(\vec{\lambda}) \searrow 0 \implies \text{出現確率密度 } g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) \searrow 0.$$

- つまり、任意の2つの固有値は、近い値を取りにくい。
- 実軸  $\mathbb{R}$  上の固有値  $\{\lambda_j\}$  の分布は独立ではなく、互いに斥力が働いている。  
(パウリの排他律. フェルミオン系)



**Figure 1.2.** Some typical level sequences. From Bohigas and Giannoni (1984). (a) Random levels with no correlations, Poisson series. (b) Sequence of prime numbers. (c) Slow neutron resonance levels of the erbium 166 nucleus. (d) Possible energy levels of a particle free to move inside the area bounded by  $1/8$  of a square and a circular arc whose center is the mid point of the square; i.e. the area specified by the inequalities,  $y \geq 0$ ,  $x \geq y$ ,  $x \leq 1$ , and  $x^2 + y^2 \geq r$ . (Sinai's billiard table.) (e) The zeros of the Riemann zeta function on the line  $\text{Re } z = 1/2$ . (f) A sequence of equally spaced levels (Bohigas and Giannoni, 1984).

## 2次元行列式(フェルミオン)点過程の例

(ただし, 今日は1次元と1+1次元の話だけです.)

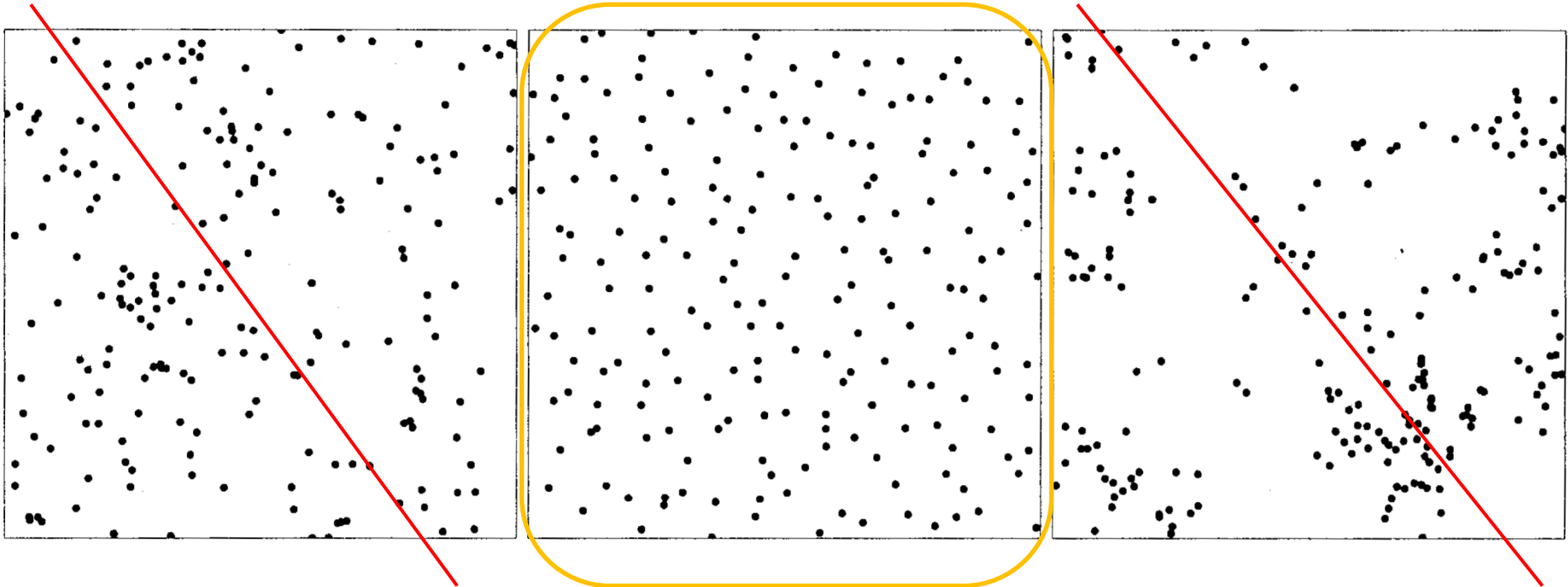


FIGURE 1. Samples of translation invariant point processes in the plane: Poisson (left), determinantal (center) and permanental for  $\mathbb{K}(z, w) = \frac{1}{\pi} e^{z\bar{w} - \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2)}$ . Determinantal processes exhibit repulsion, while permanental processes exhibit clumping.

J. Ben Hough, M. Krishnapur, Y. Peres, B. Virag, Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes, Amer. Math. Soc., 2009, p.2 より転写