時間発展する
ランダム行列固有値模型の
揺動と相関
（part 2/4）

香取眞理（中央大学理工学部）
KATORI, Makoto

2014年度夏学期 第10回 駒場物性セミナー
2014年7月25日（金）16:30-18:00
東京大学駒場キャンパス　16号館 827 号室

1. Introduction

1.2 エルミート行列値ブラウン運動と その固有値過程(Dyson model)

$\mathrm{GUE}_N(0,\sigma^2)\cdots N\times N$ エルミート行列の空間 $\mathcal{H}(N)$ における**正規分布**

$\sigma^2=t$ として，t を時間変数とせよ：$t\in[0,\infty)$

$N\times N$ エルミート行列の空間 $\mathcal{H}(N)$ の中の**ブラウン運動**

$$
\mathsf{B}(t) = \begin{pmatrix}
B_{11}(t) & B_{12}(t/2) + i\widetilde{B}_{12}(t/2) & B_{13}(t/2) + i\widetilde{B}_{13}(t/2) & \cdots & B_{1N}(t/2) + i\widetilde{B}_{1N}(t/2) \\
B_{12}(t/2) - i\widetilde{B}_{12}(t/2) & B_{22}(t) & B_{23}(t/2) + i\widetilde{B}_{23}(t/2) & \cdots & B_{2N}(t/2) + i\widetilde{B}_{2N}(t/2) \\
B_{13}(t/2) - i\widetilde{B}_{13}(t/2) & B_{23}(t) - i\widetilde{B}_{23}(t/2) & B_{33}(t) & \cdots & B_{3N}(t/2) + i\widetilde{B}_{3N}(t/2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
B_{1N}(t/2) - i\widetilde{B}_{1N}(t/2) & B_{2N}(t/2) - i\widetilde{B}_{2N}(t/2) & B_{3N}(t/2) - i\widetilde{B}_{3N}(t/2) & \cdots & B_{NN}(t)
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{rl}
B_{jj}(t), 1 \le j \le N & N\ \text{個} \\
B_{jk}(t), 1 \le j < k \le N & N(N-1)/2\ \text{個} \\
\widetilde{B}_{jk}(t), 1 \le j < k \le N & N(N-1)/2\ \text{個} \quad + \\
\hline
 & N^2\text{個}
\end{array}
$$

N^2 個の独立な標準ブラウン運動 (原点からスタート，時刻 $t > 0$ での分散 $\sigma^2 = t$.)

$\mathsf{B}(t), t \ge 0$: $\mathcal{H}(N)$ の空間中のブラウン運動

$N \times N$ エルミート行列に値をもつブラウン運動

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(N) &\simeq \mathbb{R}^{N^2} \\
\mathsf{B}(t) &\simeq N^2 \text{ 次元ブラウン運動}
\end{aligned}
$$

しかし，$\mathsf{B}(t), t \geq 0$ はエルミート行列値 $\Longrightarrow$ N 個の実固有値をもつ.

- 固有値確率過程

$$
\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_N(t)), \quad t \geq 0.
$$

- 定義より，$X_j(t)$ は N^2 個の独立なブラウン運動からなる $\mathsf{B}(t)$ の汎関数

$$
X_j(t) = F_j(\mathsf{B}(t)), \quad 1 \leq j \leq N.
$$

- 伊藤の公式より，$\vec{X}(t)$ の各成分は次の**確率微分方程式 (SDE)** を満たすことが導ける. (N 連立 SDE)

$$
\boxed{dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} \frac{dt}{X_j(t) - X_k(t)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0.}
$$

ただし，$B_j(t), 1 \leq j \leq N$ は上の $\mathsf{B}(t)$ の成分に現れた $B_{ij}(t)$ とは別もの.
N 個の独立な 1 次元標準ブラウン運動である.

$$\boxed{dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1 \le k \le N, \\ k \ne j}} \frac{dt}{X_j(t) - X_k(t)}, \quad 1 \le j \le N, \quad t \ge 0.}$$

- この SDE 系は**ダイソン模型**とよばれる.
  より正確には，Dyson's Brownian motion model の $\beta = 2$ の場合
  (GUE の場合，$\mathbb{C}$ の場合，A 型の場合)

- すべての粒子間に粒子間距離に反比例する斥力が働く.

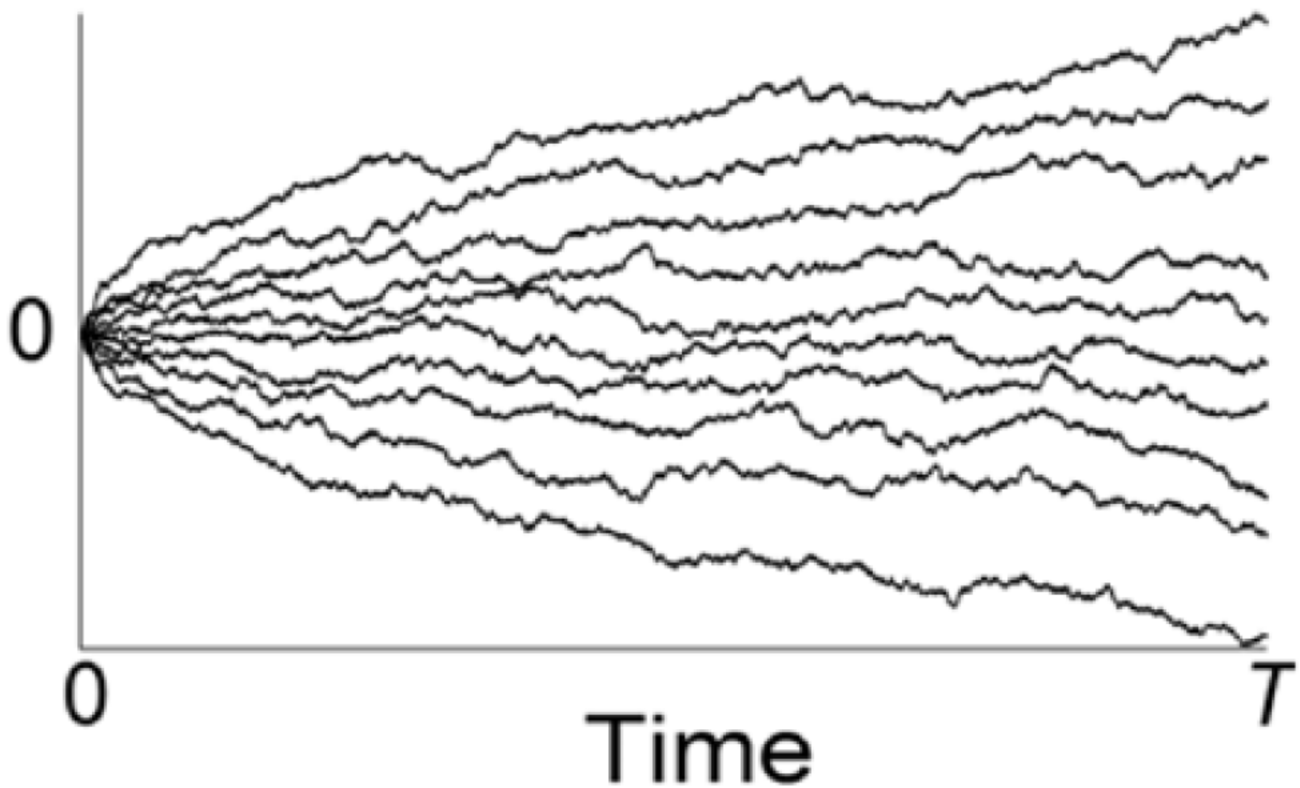
- 長距離相互作用 (べき乗型) をもつ「相互作用ブラウン粒子系」
  (Interacting Brownian motions)

- 時刻 $t > 0$ での同時刻分布関数（密度関数）は

$$g_t^{\mathrm{GUE}}(\vec{x}) = \frac{t^{-N^2/2}}{C(N)} e^{-|\vec{x}|^2/2t} h_N(\vec{x})^2.$$

- ただし，これは初期配置が $u_j \equiv X_j(0) = 0, \quad 1 \le j \le N$ である場合.
（すべての粒子が原点からスタート.）

- すべての粒子状態が「0 状態」に縮退している場合.



2. 問題設定：時空相関関数の決定

問題設定1

[1]　一般の初期配置

$$u_j = X_j(0), \quad 1 \leq j \leq N$$

に対して（同時刻）分布を求めよ．

[2]　多時刻分布を求めよ．
長距離相互作用ブラウン運動の N 本の軌跡の統計的な振る舞い（確率法則）を明らかにせよ．

[3]　$N \to \infty$ の極限（無限粒子極限，熱力学・流体力学極限）を考えよ．

[1]　一般の初期配置

$$u_j = X_j(0), \quad 1 \le j \le N$$

に対して（同時刻）分布を求めよ．

[2]　多時刻分布を求めよ．
長距離相互作用ブラウン運動の N 本の軌跡の統計的な振る舞い（確率法則）を明らかにせよ．

[3]　$N \to \infty$ の極限（無限粒子極限，熱力学・流体力学極限）を考えよ．

(3-1)　平衡状態について：Log-gas の無限粒子系の構成問題

$$\text{相互作用の斥力}\, F = \frac{1}{x} \quad (x\text{=粒子間距離})$$

$$\text{相互作用ポテンシャル}\, V(x) = -\int^x F(y)dy = -\log x + \text{constant}$$

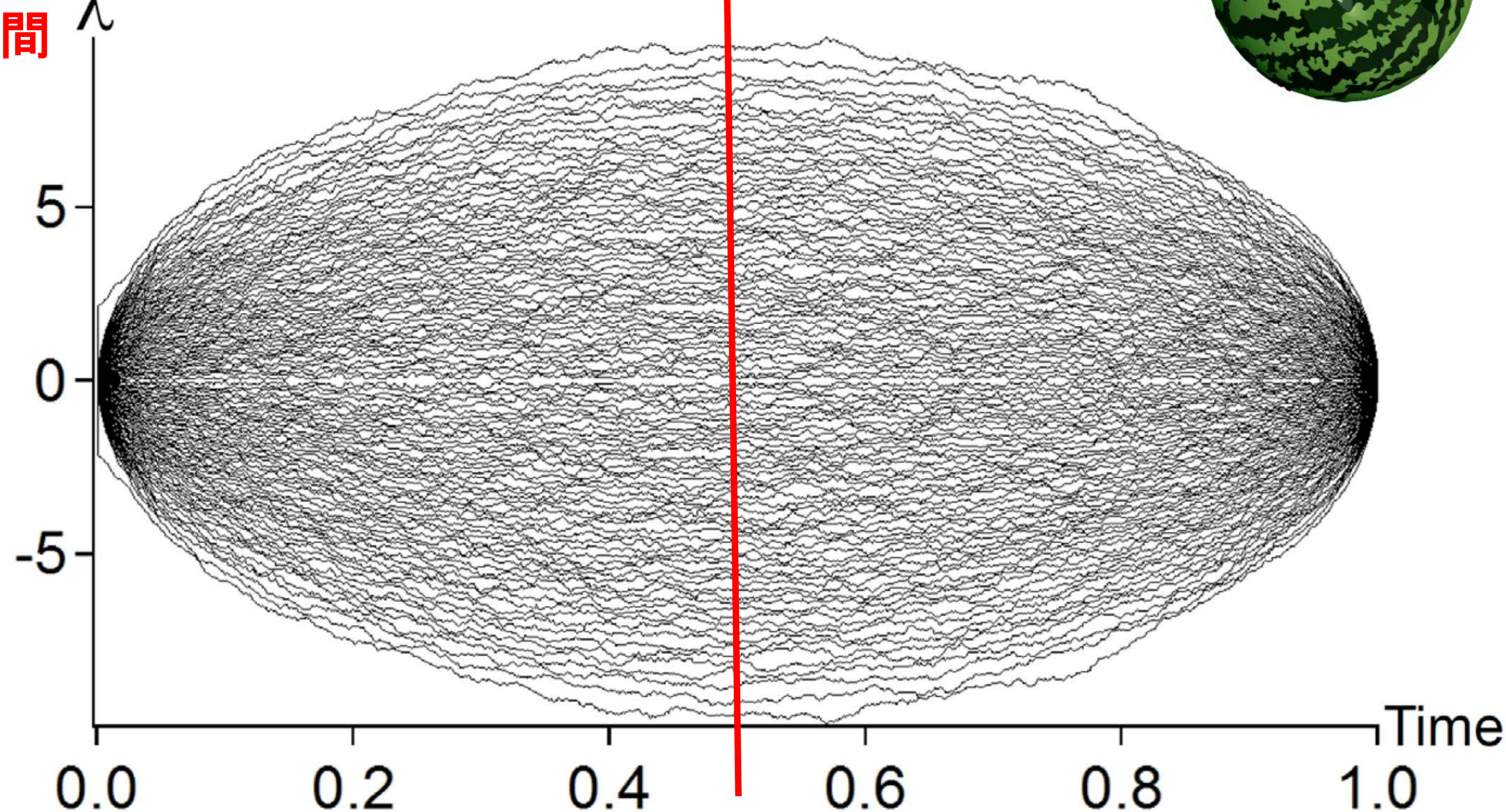
$$\left|\int_{x_0}^{\infty} V(x)dx\right| = \int_{x_0}^{\infty} \log x dx = \Big[x \log x - x\Big]_{x_0}^{\infty} = \infty.$$

- 2 次元クーロンポテンシャル (Log-gas) をもつ 1 次元系は，いわゆる Ruelle クラスに入らない．
- 通常無限粒子系を定義する DLR 方程式 (Dobrushin-Lanford-Ruelle equation) の「バルク内部と外部との間のポテンシャル項」が発散してしまい，意味を持たない．
- 参考文献：長田博文（九大数学）：次の文献の「11.5 章 ランダム行列」の項．
伊藤清 企画・監修，渡辺信三/重川一郎 編「確率論ハンドブック」，丸善出版, 2012.

(3-2)　非平衡系について．

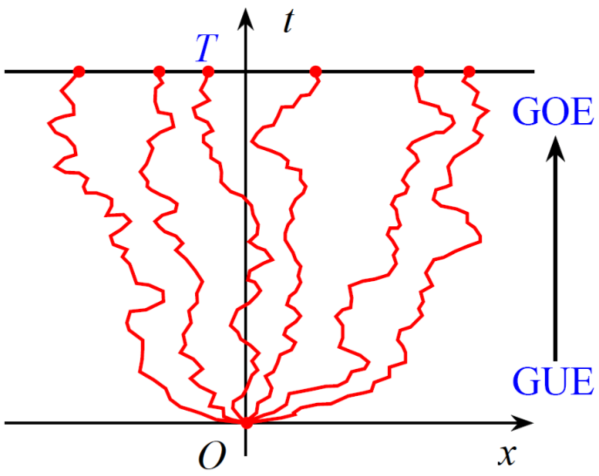
空

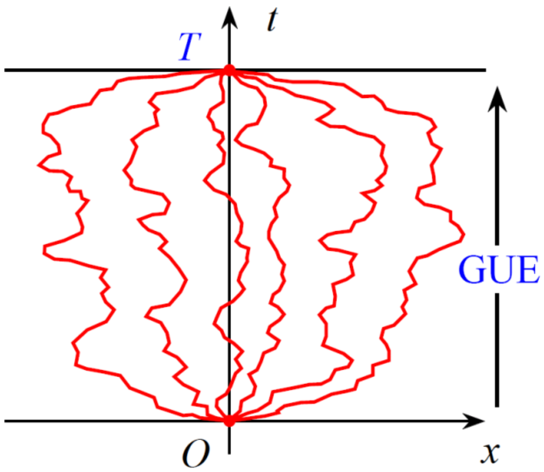
間

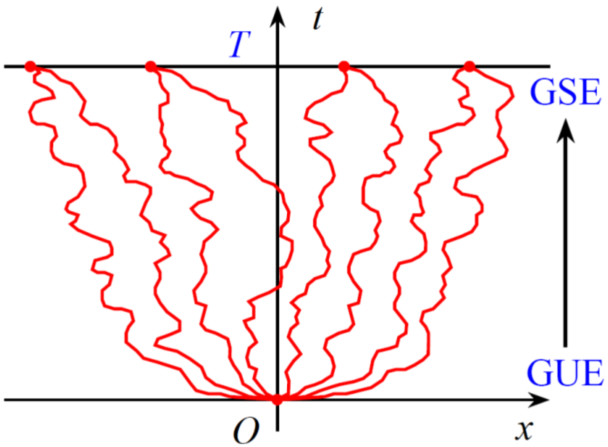


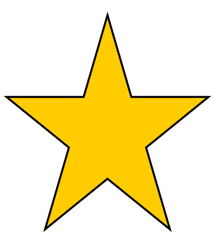
時　間

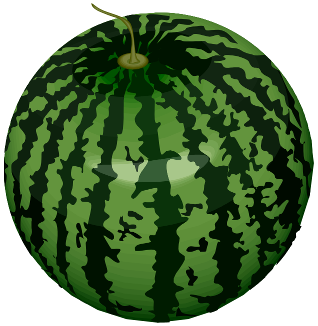
非衝突ランダム曲線 (directed polymers) のトポロジー
⇔ ランダム行列の対称性の転移 (two-matrix models)



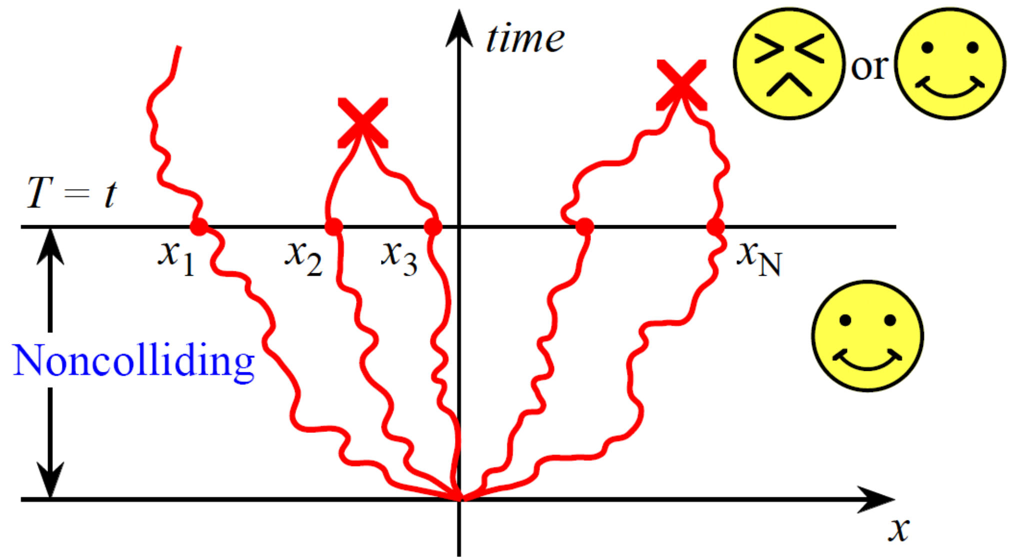








Case $t = T$



Case $T \to \infty$