時間発展する
ランダム行列固有値模型の
揺動と相関
（part 3/4）

香取眞理（中央大学理工学部）
KATORI, Makoto

2014年度夏学期 第10回 駒場物性セミナー

2014年7月25日（金）16:30-18:00

東京大学駒場キャンパス　16号館 827 号室

Vicious Walker Models

Physics

Focus: How Animals Avoid Each Other

Published November 12, 2010 | *Phys. Rev. Focus* **26**, 20 (2010) | DOI: 10.1103/PhysRevFocus.26.20

Foraging animals or other randomly moving entities can more easily avoid each other by taking more long-distance jumps,

$$\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)),$$
$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1\le k\le N,\\ k\ne j}} \frac{dt}{X_j(t) - X_k(t)}, \quad 1 \le j \le N, \quad t \ge 0$$

の初期配置 $X_j(0) = u_j, 1 \le j \le N,$

$$u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_N$$

の下での解を求めたい.

- 上の連立 SDE は, $N \to \infty$ の極限で意味を持てるのか?

- 粒子に区別をつけないことにする．
  ($g_t^{\mathrm{GUE}}(\vec{x})$ は $\vec{x} = (x_j)_{1 \le j \le N}$ の N 成分の対称関数であった.)

$$\Xi(t, \cdot) \equiv \sum_{j=1}^{N} \delta_{X_j(t)}(\cdot) \in \mathfrak{M}.$$

ただし，$A \subset \mathbb{R}$ に対して，

$$\delta_x(A) = \int_A \delta_x(dy) = \mathbf{1}(x \in A) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

特に $A = \{y\}$ とした場合は，$\delta_x(\{y\}) = \delta(x - y)$ (デルタ関数) ということ．

- 初期配置を

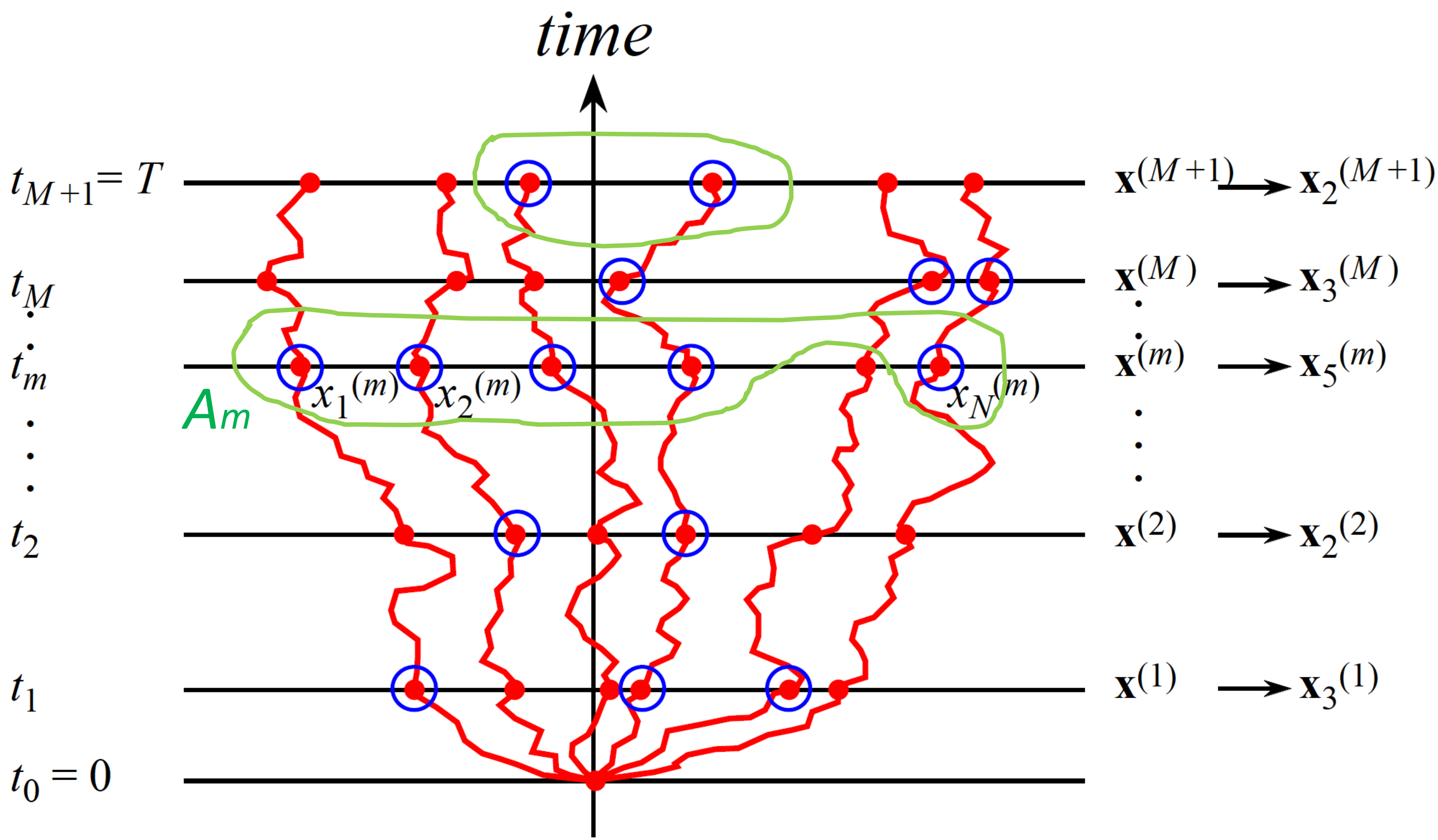
$$\xi = \xi(\cdot) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{u_j}(\cdot) = \sum_{j=1}^{N} \delta_{u_j}$$

と書くことにする．

M 時刻, $(N_m)_{m=1}^M$ 点, 時空相関関数

$$M \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\},$$
$$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_M < \infty,$$
$$1 \le N_m \le N, \quad 1 \le m \le M,$$
$$\vec{x}_{N_m}^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{N_m}^{(m)}) \in \mathbb{R}^{N_m} \subset \mathbb{R}^N, \quad 1 \le m \le M.$$

$$\boxed{\rho_\xi \left(t_1, \vec{x}_{N_1}^{(1)}; t_2, \vec{x}_{N_2}^{(2)}; \cdots ; t_M, \vec{x}_{N_M}^{(M)} \right)}$$



$A_m \in \mathbb{R}, \quad 1 \le m \le M,$

$$\mathrm{Prob}\left(x_j^{(m)}(t_m) \in A_m, 1 \le j \le N_m, 1 \le m \le M\right) = \prod_{m=1}^{M} \int_{A_m} d\vec{x}_{N_m}^{(m)}\, \rho_\xi\left(t_1, \vec{x}_{N_1}^{(1)}; t_2, \vec{x}_{N_2}^{(2)}; \cdots; t_M, \vec{x}_{N_M}^{(M)}\right).$$

問題設定2

[1]　任意の（有限粒子）初期配置 ξ の下,
任意の $M \in \mathbb{N}, 1 \leq t_1 < \cdots < t_M < \infty, \vec{x}_{N_m}^{(m)}$ に対して,

$$\rho_\xi \left(t_1, \vec{x}_{N_1}^{(1)}; t_2, \vec{x}_{N_2}^{(2)}; \cdots ; t_M, \vec{x}_{N_M}^{(M)} \right)$$

を定めよ.

[2]　$N \to \infty$ の極限ではどうか?

3. 行列式過程 (determinantal process)

解答

$$N < \infty$$

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} u_j \in \mathfrak{M}_0 \equiv \{\xi \in \mathfrak{M} : \xi(\{x\}) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

⬇

$$\mathcal{M}_\xi^{u_j}(t, x), \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

⬇

$$\mathbb{K}_\xi(s, x; t, y) = \int_{\mathbb{R}} \xi(dv) p(s, x|v) \mathcal{M}_\xi^v(t, y) - \mathbf{1}(s > t) p(s - t, x|y),$$

$p(t, y|x) = \mathrm{p}_t(y - x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(y-x)^2/2t}$, ブラウン運動の推移確率密度

$$\mathbf{1}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \text{ is OK} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$N < \infty$

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} u_j \in \mathfrak{M}_0 \equiv \{\xi \in \mathfrak{M} : \xi(\{x\}) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{\xi}^{u_j}(t,x), \quad 1 \le j \le N, \quad t \in [0,\infty), \quad x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\mathbb{K}_{\xi}(s,x;t,y) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \xi(dv) p(s,x|v) \mathcal{M}_{\xi}^{v}(t,y) - \mathbf{1}(s>t) p(s-t,x|y)}$$

$$\boxed{\rho_{\xi}\left(t_1, \vec{x}_{N_1}^{(1)}; \dots ; t_M, \vec{x}_{N_M}^{(M)}\right) = \det_{\substack{1 \le j \le N_m, 1 \le k \le N_n, \\ 1 \le m,n \le M}} \left[\mathbb{K}_{\xi}(t_m, x_j^{(m)}; t_n, x_k^{(n)}) \right]}$$

M 時刻, $(N_m)_{m=1}^M$ 点, 時空相関関数

$$\rho_\xi\left(t_1, \vec{x}_{N_1}^{(1)}; \dots; t_M, \vec{x}_{N_M}^{(M)}\right) = \det_{\substack{1\le j\le N_m, 1\le k\le N_n,\\ 1\le m,n\le M}} \left[\mathbb{K}_\xi(t_m, x_j^{(m)}; t_n, x_k^{(n)})\right]$$

サイズ $N_1 + N_2 + \cdots + N_M$ の行列の行列式

- 行列要素は，ある 1 つの関数 $\mathbb{K}_\xi$ の特殊値
- $\mathbb{K}_\xi$ (**相関核**とよぶ) は時空上の 2 点 $(s,x),(t,y) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$ の関数
- $\mathbb{K}_\xi$ は初期配置 ξ の汎関数

このように，任意の時空相関関数が一つの相関核で指定される行列式で与えられるような多粒子確率過程を**行列式過程** (**determinantal process**) とよぶことにする．

- $\xi \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_0$ への拡張

$$\operatorname{supp}\xi \equiv \{x \in \mathbb{R} : \xi(\{x\}) \geq 1\},$$

$$\xi_*(\cdot) = \sum_{v \in \operatorname{supp}\xi} \delta_v(\cdot),$$

$$\boxed{\mathcal{M}_\xi^{u_j}(t,y) \Longrightarrow \mathcal{M}_\xi^v((s,x)|(t,y)),}$$

$$\mathbb{K}_\xi(s,x;t,y) = \int_{\mathbb{R}} \xi_*(dv) p(s,x|v) \mathcal{M}_\xi^v((s,x)|(t,y)) - \mathbf{1}(s>t) p(s-t,x|y).$$

4. マルチンゲール (martingale)

- $\xi = \sum_{j=1}^{N} \delta_{u_j}$.
- パラメータ $v \in \mathbb{R}$ をもつ連続関数

$$\mathcal{M}_\xi^v(\cdot,\cdot) : [0,\infty) \times S \mapsto \mathbb{R}$$

- 次の条件を満たす.

(M1) $\mathcal{M}_\xi^{u_k}(t, B(t)),\ 1 \le k \le N$ は**連続時間マルチンゲール**；

$$\mathrm{E}[\mathcal{M}_\xi^{u_k}(t, B(t)) | \mathcal{F}(s)] = \mathcal{M}_\xi^{u_k}(s, B(s)) \quad \text{a.s. for all } 0 \le s \le t.$$

(M2) 各時刻 $t \ge 0$ において，$\mathcal{M}_\xi^{u_k}(t,x), 1 \le k \le N$ は x の関数として独立.

(M3) $1 \le j, k \le N$ に対して,

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathrm{E}_{u_j}[\mathcal{M}_\xi^{u_k}(t, B(t))] = \delta_{jk}.$$

- このような関数の族 $\mathcal{M}_\xi(t,x) = \{\mathcal{M}_\xi^v(t,x)\}$ を**マルチンゲール関数**とよぶ.

マルチンゲール＝賭博必勝法（倍賭け法）

① 1万円賭ける

同額1万円を賭けた胴元との賭けに勝つ
＋2万円を得る

すぐに賭けをやめる
－1万円＋2万円＝1万円（手元に残る）

負ける
賭けを続ける

② 倍の2万円を賭ける

同額2万円を賭けた胴元との賭けに勝つ
＋4万円を得る

ここで賭けをやめる
（－1－2)万円＋4万円＝1万円（手元に残る）

負ける
賭けを続ける

③ さらに倍の4万円を賭ける

勝つまで倍賭け：勝ったところでやめる：いつも1万円残る

ブラウン運動 $B(t)$ と時刻 $t \geq 0$ の関数 $f(t, B(t))$ で与えられ, 次を満たす確率過程を**連続時間マルチンゲール**とよぶ.

$$\mathrm{E}[f(t, B(t)) | \mathcal{F}(s)] = f(s, B(s)), \quad \text{a.s. for all } 0 \leq s \leq t.$$

ただし，$\mathcal{F}(s)$ は時刻 s までの情報系（filtration);

$$\mathcal{F}(s) = \sigma(B(r) : 0 \leq r \leq s).$$

また，$\mathrm{E}[\cdots | \mathcal{F}(s)]$ は $\mathcal{F}(s)$ を与えたときの条件付き期待値.

マルチンゲール：平均値を変えずに変動する「揺動」を表す確率過程