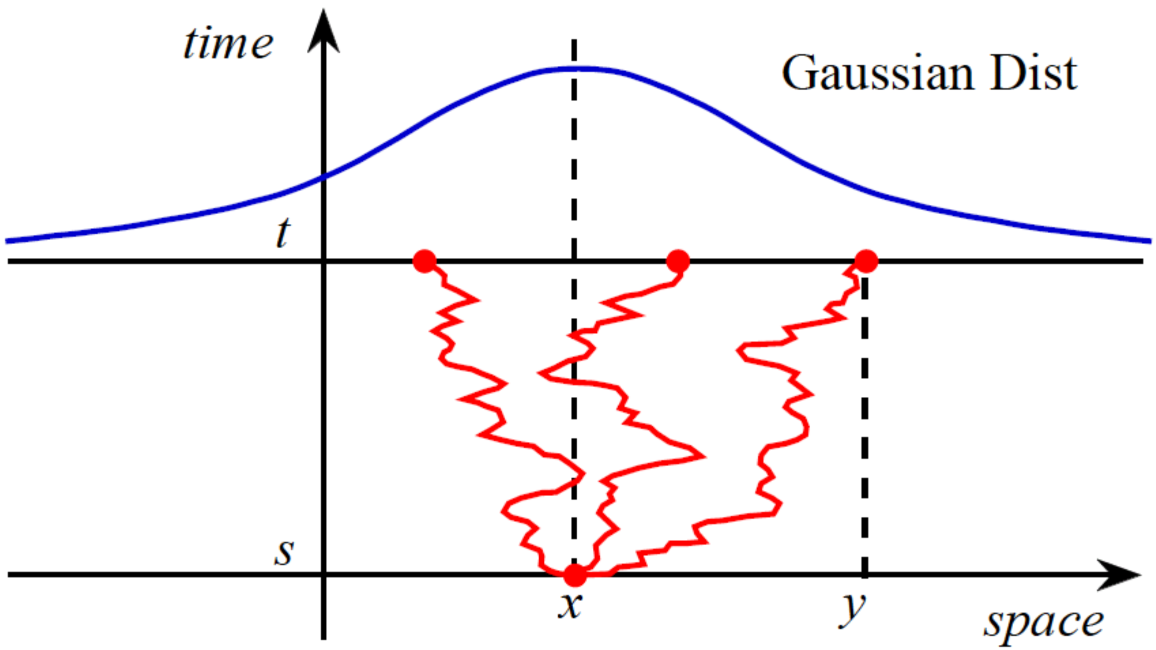
時間発展する
ランダム行列固有値模型の
揺動と相関
(part 4/4)

香取眞理(中央大学理工学部)
KATORI, Makoto

2014年度夏学期 第10回 駒場物性セミナー
2014年7月25日(金)16:30-18:00
東京大学駒場キャンパス 16号館 827 号室

- ブラウン運動自身はマルチンゲール．$0 \le s \le t$ に対して，

$$\mathrm{E}[B(t)|\mathcal{F}(s)] = \int_{\mathbb{R}} yp(t-s, y|B(s)) = B(s).$$



- ブラウン運動自身はマルチンゲール．$0 \le s \le t$ に対して，

$$\mathrm{E}[B(t)|\mathcal{F}(s)] = \int_{\mathbb{R}} y p(t-s, y|B(s)) = B(s).$$

- $B(t)^2$ はマルチンゲールではないが，

$$m_2(t, B(t)) = B(t)^2 - t, \quad t \ge 0$$

はマルチンゲール．

- $B(t)$ の (monic な) ３次式で与えられるマルチンゲールは？

$$m_3(t, B(t)) = B(t)^3 - 3tB(t), \quad t \ge 0.$$

- 一般に $n \in \mathbb{N}_0$ に対して，次はマルチンゲール．

$$m_n(t, B(t)) = \left(\frac{t}{2}\right)^{n/2} H_n\left(\frac{B(t)}{\sqrt{2t}}\right), \quad t \ge 0.$$

ただし，$H_n(x)$ はエルミート多項式

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \frac{n!}{j!(n-2j)!} (2x)^{n-2j}.$$

マルチンゲール関数（n 次マルチンゲール多項式）

$$m_n(t,x) = \left(\frac{t}{2}\right)^{n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

- n 次単項式 W^n を n 次マルチンゲール多項式 $m_n(t,x)$ に移す変換

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}[f(W)|(t,x)] : f(W) \to \widehat{f}(t,x)$$

条件より，

$$\mathcal{I}[W^n|(t,x)] = m_n(t,x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

これは次の積分変換で与えられる．

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{I}[f(W)|(t,x)] &= \int_{\mathbb{R}} f(iW) q(t,w|x) dw, \\ q(t,w|x) &= \frac{e^{-(ix+w)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}. \end{aligned}}$$

- 各初期配置 $\xi = \sum_{j=1}^{N} \delta_{u_j} \in \mathfrak{M}_0$ に対して，次のような N 個の $(N-1)$ 次多項式を定義する．

$$\boxed{\Phi_\xi^{u_j}(z) = \prod_{\substack{1 \le \ell \le N, \\ \ell \neq j}} \frac{z - u_\ell}{u_j - u_\ell},} \quad 1 \le j \le N, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$\Phi_\xi^{u_j}(u_k) = \delta_{jk}, \quad 1 \le j, k \le N.$$

- この多項式を上述の積分変換で変換すると，相関核を定めるマルチンゲール関数が得られる：

$$\boxed{\mathcal{M}_\xi^{u_j}(t, x) = \mathcal{I}[\Phi_\xi^{u_j}(W)|(t, x)], \quad 1 \le j \le N.}$$

$$N < \infty$$

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} u_j \in \mathfrak{M}_0 \equiv \{\xi \in \mathfrak{M} : \xi(\{x\}) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_\xi^{u_j}(t,x), \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \in [0,\infty), \quad x \in \mathbb{R}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbb{K}_\xi(s,x;t,y) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \xi(dv) p(s,x|v) \mathcal{M}_\xi^{v}(t,y) - \mathbf{1}(s>t) p(s-t,x|y)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho_\xi\left(t_1, \vec{x}_{N_1}^{(1)}; \dots; t_M, \vec{x}_{N_M}^{(M)}\right) = \det_{\substack{1 \leq j \leq N_m, 1 \leq k \leq N_n, \\ 1 \leq m,n \leq M}} \left[\mathbb{K}_\xi(t_m, x_j^{(m)}; t_n, x_k^{(n)})\right]}$$

行列式恒等式 (determinantal identity)

$$\mathrm{E}_{\vec{u}}\left[\prod_{m=1}^{M}\prod_{j=1}^{N}\{1+\chi_{t_m}(B_j(t_m))\}\det_{1\le j,k\le N}\left[\mathcal{M}_{\xi}^{u_k}(t,B_j(T))\right]\right]$$

$$=\operatorname*{Det}_{\substack{(s,t)\in\{t_1,\dots,t_M\}^2,\\(x,y)\in\mathbb{R}^2}}\left[\delta_{st}\delta_x(\{y\})+\mathbb{K}_\xi(s,x;t,y)\chi_t(y)\right]$$

- 任意の有限時刻列 $0<t_1<t_2<\cdots<t_M\le T<\infty$.
- $\chi_{t_m}(x), 1\le m\le M$: テスト関数 (任意の可測関数)
- $B_j(t), 1\le j\le N$: 独立な N 個のブラウン運動
- 左辺の $\mathrm{E}_{\vec{u}}[\cdots]$ は $B_j(0)=u_j, 1\le j\le N$ からスタートした N 個のブラウン運動に対する期待値を表す.
- 右辺の $\mathrm{Det}[\cdots]$ は相関核 $\mathbb{K}_\xi$ に対する**フレドホルム行列式**

$$\operatorname*{Det}_{\substack{(s,t)\in\{t_1,\dots,t_M\}^2,\\(x,y)\in\mathbb{R}^2}}\left[\delta_{st}\delta_x(\{y\})+\mathbb{K}_\xi(s,x;t,y)\chi_t(y)\right]$$

$$\equiv\sum_{\substack{0\le N_m\le N,\\1\le m\le M}}\int_{\prod_{m=1}^{M}\mathbb{W}_{N_m}(S)}\prod_{m=1}^{M}d\vec{x}_{N_m}^{(m)}\prod_{j=1}^{N_m}\chi_{t_m}\left(x_j^{(m)}\right)\det_{\substack{1\le j\le N_m,1\le k\le N_n,\\1\le m,n\le M}}\left[\mathbb{K}_\xi(t_m,x_j^{(m)};t_n,x_k^{(n)})\right]$$

を表す.

- $\xi \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_0$ への拡張 $\mathcal{M}_\xi^{u_j}(t,y) \implies \mathcal{M}_\xi^v((s,x)|(t,y))$:

$$\mathcal{M}_\xi^v((s,x)|(t,B(t))) = \mathcal{I}\left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\delta_v)} \frac{p(s,x|\zeta)}{p(s,x|v)} \frac{1}{W-\zeta} \Phi_\xi^\zeta(W) d\zeta \,\middle|\, (t,B(t)) \right], \quad t \in [0,\infty).$$

ただし，$C(\delta_v)$ は $\mathbb{C}$ 上の contour であり，$\mathbb{R}$ 上の点 v を反時計回りに 1 回転するもの．

無限粒子系極限（非平衡ダイナミクス）

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} \delta_{u_j} \to \xi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{u_j}, \quad \cdots < u_{-1} < u_0 < u_1 < u_2 < \cdots,$$

$$\Phi_{\xi}^{u_j}(z) \to \prod_{\substack{\ell \in \mathbb{Z}, \\ \ell \neq j}} \frac{z - u_\ell}{u_j - u_\ell}$$ 整関数のワイエルシュトラス無限積表示

例

$$\xi = \xi^{\mathbb{Z}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j$$

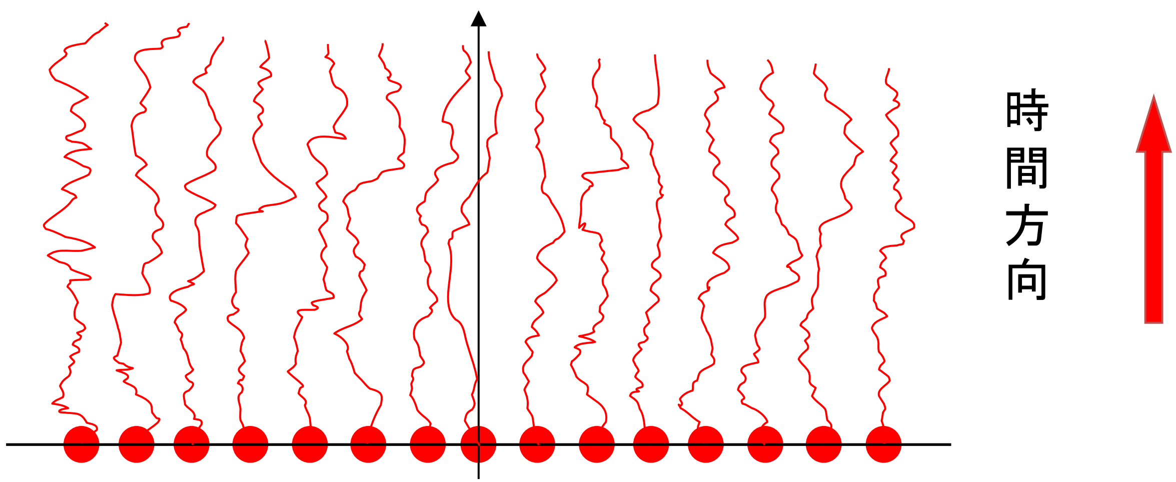
$$\Phi_{\xi^{\mathbb{Z}}}^{j}(z) = \prod_{\substack{\ell \in \mathbb{Z}, \\ \ell \neq j}} \frac{z - \ell}{j - \ell} = \frac{\sin\{\pi(z-j)\}}{\pi(z-j)} = \frac{1}{2\pi} \int_{|k| \leq \pi} e^{ik(z-j)} dk, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\Phi^j_{\xi^{\mathbb{Z}}}(z) = \prod_{\substack{\ell\in\mathbb{Z},\\ \ell\neq j}} \frac{z-\ell}{j-\ell} = \frac{\sin\{\pi(z-j)\}}{\pi(z-j)} = \frac{1}{2\pi}\int_{|k|\leq\pi} e^{ik(z-j)}dk, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\mathcal{M}^j_{\xi^{\mathbb{Z}}}(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{|k|\leq\pi} e^{k^2t/2+ik(x-j)}dk, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{K}_{\xi^{\mathbb{Z}}}(s,x;t,y) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{|k|\leq\pi} e^{k^2(t-s)/2+ik(y-x)}\vartheta_3(x-iks, 2\pi i s) - \mathbf{1}(s>t)p(s-t,x|y),$$

$$\vartheta_3(v,\tau) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\ell+\pi i\tau\ell^2}, \quad \Im\tau > 0 \quad \text{(ヤコビのテータ関数)}$$



$$\xi = \xi^{\mathbb{Z}} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j$$

$$\mathbb{K}_{\xi\mathbb{Z}}(s,x;t,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{|k|\le\pi} e^{k^2(t-s)/2+ik(y-x)}\vartheta_3(x-iks, 2\pi is) - \mathbf{1}(s>t)p(s-t,x|y)$$

$$\rho_\xi\left(t_1,\vec{x}^{(1)}_{N_1};\dots;t_M,\vec{x}^{(M)}_{N_M}\right) = \det_{\substack{1\le j\le N_m, 1\le k\le N_n,\\ 1\le m,n\le M}}\left[\mathbb{K}_{\xi\mathbb{Z}}(t_m, x^{(m)}_j; t_n, x^{(n)}_k)\right]$$

$$M \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\},$$

$$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_M < \infty,$$

$$\xcancel{1 \le N_m \le N, \quad 1 \le m \le M} \quad \Longrightarrow \quad 1 \le N_m < \infty, \quad 1 \le m \le M,$$

$$\vec{x}^{(m)}_{N_m} = (x^{(m)}_1, x^{(m)}_2, \dots, x^{(m)}_{N_m}) \in \mathbb{R}^{N_m}, \quad 1 \le m \le N.$$

5. 定常Airy 過程，Tracy-Widom 分布

- Airy 関数

$$\boxed{\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(zk+k^3/3)}dk.}$$

Airy の微分方程式

$$\mathcal{H}^z_{\mathrm{Ai}} f(z) = 0, \quad \mathcal{H}^z_{\mathrm{Ai}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z$$

の解で，実軸 $\mathbb{R}$ 上で次の漸近形をもつもの：

$$\mathrm{Ai}(x) \simeq \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right), \quad \mathrm{Ai}(-x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad x \to +\infty.$$

- Sturm-Liouville 型微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^y_{\mathrm{Ai}}\right) p_{\mathrm{Ai}}(t,y|s,x) = 0, \quad 0 < s < t, \quad x, y \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{t \downarrow s} p_{\mathrm{Ai}}(t,y|s,x) = \delta_x(\{y\}).$$

$$p_{\mathrm{Ai}}(t,y|s,x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{k(t-s)/2} \mathrm{Ai}(x+k)\mathrm{Ai}(y+k)dk, \quad 0 \le s \le t, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- ドリフト付拡散方程式

$$q(t,y|s,x) = \frac{g(s,x)}{g(t,y)} p_{\mathrm{Ai}}(t,y|s,x),$$
$$g(s,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{Ai}}(s,z|x)dz = \exp\left(-\frac{sx}{2} + \frac{s^3}{24}\right).$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}^y_{\mathrm{Ai}}\right) q(t,y|s,x) = 0, \quad \mathcal{L}^y_{\mathrm{Ai}} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{t}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

- この $q(t,y|s,x)$ を推移確率密度としてもつ拡散過程は

$$Y(t)=B(t)+\frac{t^2}{4} \iff Y(t)-\frac{t^2}{4}=B(t).$$

- ブラウン運動の（n 次基本）マルチンゲール多項式

$$m_n(t,x)=\left(\frac{t}{2}\right)^{n/2}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right),\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

$Y(t)$ の（n 次基本）マルチンゲール多項式は

$$\widehat{m}_n(t,x)=\left(\frac{t}{2}\right)^{n/2}H_n\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\left(x-\frac{t^2}{4}\right)\right)=\mathcal{I}_{\mathrm{Ai}}[W^n|(t,x)].$$

ただし,

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Ai}}[f(W)|(t,x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(iw)q_{\mathrm{Ai}}(t,w|x)dw,\quad q_{\mathrm{Ai}}(t,w|x)=q\left(t,w\middle|x-\frac{t^2}{4}\right).$$

- ダイソン模型のときのマルチンゲール関数

$$\mathcal{M}_\xi^v(t,x) = \mathcal{I}[\Phi_\xi^v(W)|(t,x)], \quad \Phi_\xi^v(z) = \prod_{\substack{1\le \ell \le N, \\ u_\ell \neq v}} \frac{z-u_\ell}{v-u_\ell}, \quad 1 \le j \le N, \quad v, z \in \mathbb{C}.$$

- このドリフト付の場合には

$$\widehat{\Phi}_\xi^v(z) = e^{c(z-v)} \Phi_\xi^v(z), \quad c = c(N),$$

$$\widehat{\mathcal{M}}_\xi^v(t,x) = \mathcal{I}_{\mathrm{Ai}}[\widehat{\Phi}_\xi^v(W)|(t,x)].$$

こういった変更を行うと，次の論文

[KT09] M. Katori, H. Tanemura, Zeros of Airy function and relaxation process, J. Stat. Phys. **136** (2009) 1177-1204.

で導入したドリフト付の非衝突ブラウン運動の系が，ここで説明したマルチンゲールの方法で構成できる．

初期配置を Ai の零点とする．$N \to \infty$ 極限をとる．

定常 Airy 過程

最も右側の粒子の位置 R の分布は **Tracy-Widom 分布**で与えられる.

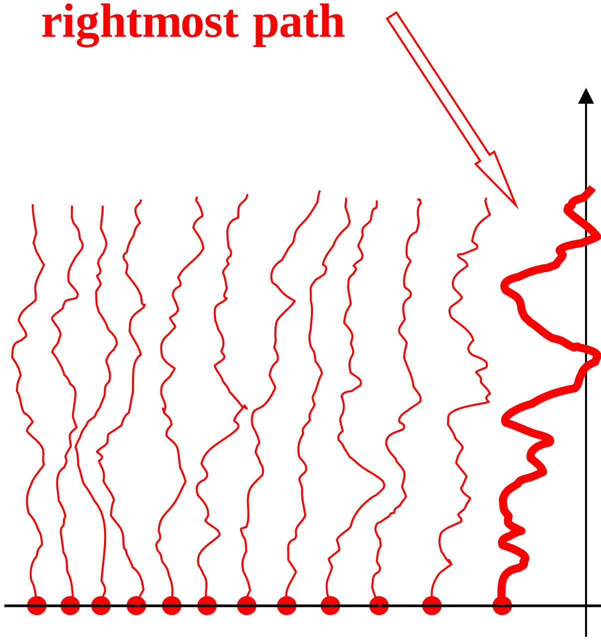
$$\mu_{\mathrm{Ai}}(R < x) = \exp\left[-\int_x^\infty (y-x)(q(y))^2 dy\right],$$

ここで，$q(x)$ は Painlevé II 方程式

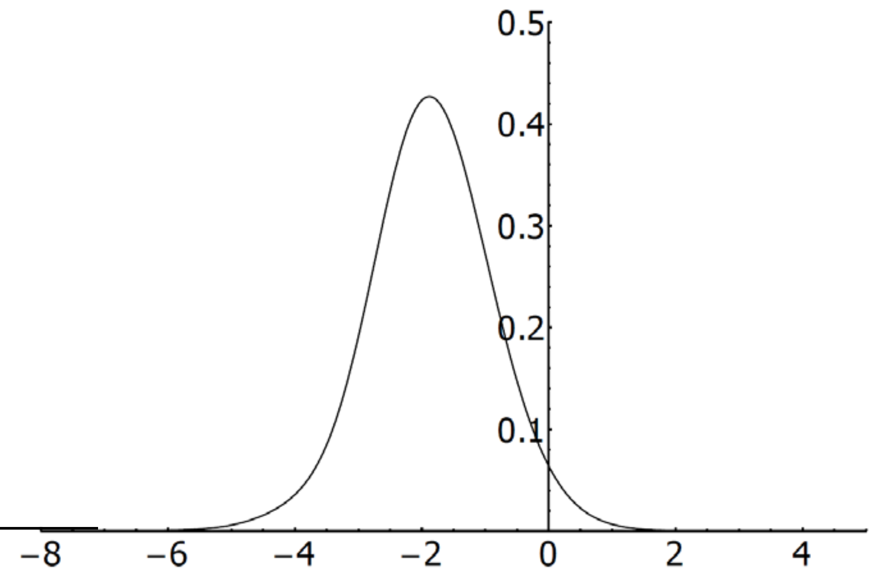
$$q'' = xq + 2q^3$$

の解で，次の境界条件を満たすもの $q(x) \simeq \mathrm{Ai}(x)$ in $x \to \infty$.

rightmost path



probability density function of the Tracy-Widom distribution



6. 結語

$$\mathbb{K}_\xi(s,x;t,y) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \xi(dv) p(s,x|v) \mathcal{M}_\xi^v(t,y) - \mathbf{1}(s>t) p(s-t,x|y)$$

相関（相関核）

揺動（マルチンゲール関数）

この結果から，長距離相互作用をもつ非平衡無限粒子系の「物性」を解析することが今後の課題．（環境変化に対する応答についての考察．）
例：初期配置 ξ 依存性．定常過程に至る非平衡緩和現象．

[KT10] M. Katori, H. Tanemura, Non-equilibrium dynamics of Dyson's model with an infinite number of particles, Commun. Math. Phys. **293** (2010) 469-497.

[KT13] M. Katori, H. Tanemura, Complex Brownian motion representation of the Dyson model, Electron. Commun. Probab. **18** (4) (2013) 1-16.

[K14] M. Katori, Determinantal martinagles and noncolliding diffusion processes, Stochstic Process. Appl. **124** (2014) 3724-3768.