問題

香取研究室　青木遥
参考文献：ランダムウォークと確率解析

貴方の所持金は現在10000円です。
ある目的のため100,000円を稼がなければなりません。
時間がないためギャンブルで増やそうと思います。
そこで貴方は右下の図のルーレットを用いることに決めました。
さて、どのように賭ければ10万円を稼げるでしょう。

目標1万⇒ 10万円
・賭け方は「赤 or 黒」のみで緑に賭けることは出来ない
・赤と黒はそれぞれ18個ずつで、緑に当たった場合は負けとなる
・勝てば掛け金の2倍を受け取る
・所持金が10万円を超えればクリア、0円になれば終了

① いつでも一本勝負！常に全額を賭ける

② 100円ずつ堅実に賭けて稼ぐ

③ 前半は全額投入。後半からは最低限で

解説①　常に全額投入で賭ける

常に全額を賭けるという事は、一度でも負ければ終了となるため、勝ち続けなければならない。

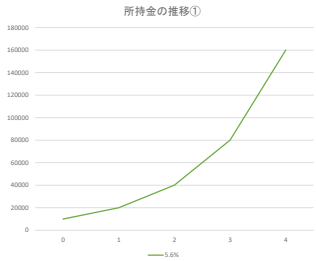
今回は所持金が1万円であるため、

⓪1万⇒①2万⇒②4万⇒③8万⇒④16万

となり、**4連勝**しなければならないことが分かる。

一回勝利する確率は18/37で、それぞれの勝敗は独立であるため、4連勝する確率は

$$\left(\frac{18}{37}\right)^4 = 5.60\%$$



解説②　100円ずつ堅実に賭ける

勝率pの勝負で、所持金xのギャンブラーが、1ずつ賭ける時、目標金額Aに達成する確率を$P_A^p(x)$とすると、0<x<Aで

$$P_A^p(x) = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^x - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^A - 1}$$

となる。

$$\begin{cases} \text{掛け金}:100\text{円} \\ \text{所持金}:10000\text{円} \\ \text{目標額}:100000\text{円} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{掛け金}:1 \\ \text{所持金}:100 \\ \text{目標額}:1000 \end{cases}$$

と条件を書き換えれば、

$$P_{1000}^{17/38}(100) = \frac{\left(\frac{1-\frac{17}{38}}{\frac{17}{38}}\right)^{100} - 1}{\left(\frac{1-\frac{17}{38}}{\frac{17}{38}}\right)^{1000} - 1}$$

$$P_{1000}^{17/38}(100) = 7.33 \times 10^{-20}\%$$

つまり、0.00000000000000000007%である。

100円ずつ少しずつ賭けたことで、勝負回数が増えすぎたのである。（勝てる確率が50%に満たない場合は勝負回数を減らした方が良い）

解説②　100円ずつ堅実に賭けるシミュレーション

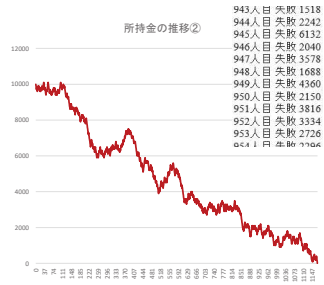
実際にプログラムで検証してみよう。

ずっと赤に賭けるとして、1～37の番号のうち1～18を赤として考え、その結果が右上のリストである。

「失敗」の右側に書かれている数字は計算回数、つまり賭けの回数である。①の時は最大でも4戦だったのに対し、②の場合は相当増えていることが分かる。

そして、何よりその成功回数だが、1000人分の結果を見てみたが、1人も成功していなかった。このプログラムでの成功確率は0.000%である。母校の全員が賭けに挑戦しても誰も成功できず破産するというのだから、恐ろしい。

ちなみに今回の計算回数の平均は3645.5回。



解説③　前半全額⇒後半最低限

前半は所持金の全額を投入し、所持金が目標金額の半分の5万円に到達したら必要最低限のみを賭けて余力を残す戦法である。

そのような場合はド・ラームの関数方程式を用いて表すことができ、目標金額を100%、つまり1として、達成確率を$F^p(x)$とすると

$$F^p(x) = \begin{cases} (1-p) \times 0 + p \times F^p(2x) & (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ (1-p) \times F^p(2x-1) + p \times 1 & (\frac{1}{2} \le x \le 1) \end{cases}$$

となる。その解はxを2進法展開をして

$$x = \frac{1}{2^{i_0}} + \frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_n}} \quad (i_0 < i_1 < \cdots < i_n)$$

と表すと右上の式となる。

$$F^p(x) = p^{i_0} + \frac{1-p}{p}p^{i_1} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 p^{i_2} + \cdots \left(\frac{1-p}{p}\right)^n p^{i_n}$$

今回は目標金額に対し所持金は1/10倍であるから、

$$x = \frac{1}{10} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \cdots + \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{2^{4n+1}} + \cdots$$

$$F^{\frac{18}{37}}\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\frac{18}{37}}{\frac{18}{37}}\right)\left(\frac{18}{37}\right)^{4(n+1)}\left(2-\left(\frac{18}{37}\right)\right)$$

$$F_{37}^{18}\left(\frac{1}{10}\right) = 9.04\%$$

①や②と比べだいぶ改善されたものの、結局所持金を10倍に出来る人間は1割にも満たない。

導出詳細は解説③詳細を参照

解説③　前半全額⇒後半最低限シミュレーション

実際にプログラムで検証してみよう。

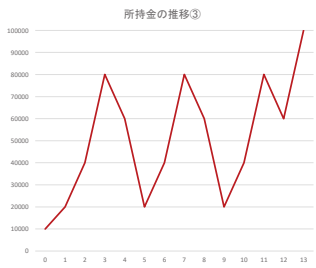
赤に賭けるとして、1～37の番号のうち1～18を赤として考える。

所持金（今回はZ）が目標金額Aの半分よりも少ないときは、全額を賭け、成功すれば所持金が2倍に、失敗すれば0となる。

所持金Zが目標金額Aの半分よりも多いときは、目標金額と所持金の差分を賭ける。成功すれば目標金額Aに到達する。

9.054%（サンプル数：10万人）が成功するという結果になり、①や②と比べだいぶ改善できていることの証拠が出た。

それでも、40人クラスで上位4人以外は全員破産するということだと考えれば、この賭けでさえも危険な賭けであるという事が分かるだろう。



他の賭け方

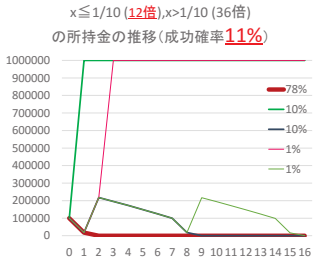
	賭け方	結果		賭け方	結果
A	1数字	36倍	F	縦一列（12数字）	3倍
B	2数字	18倍	G	1～12など（12数字）	3倍
C	3数字	12倍	H	1～18など（18数字）	2倍
D	4数字	9倍	I	奇数偶数（18数字）	2倍
E	6数字	6倍	J	赤or黒（18数字）	2倍

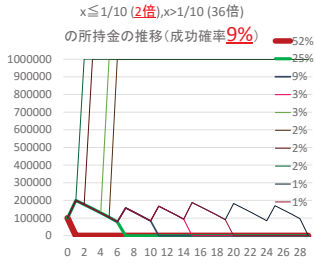
同時に二つ以上に賭けることは出来ないとして、2倍と3倍の賭けの順番を入れ替えながら試してみた。その結果、一番不利な時（1回目など）の賭け方を3倍にした方が2倍の時よりも**0.3%**ほど成功確率が上がることが分かった。それ以外についてはあまり影響をしていないようだった。

目標に対し所持金xが0<x<1/10のときの賭け方が成功確率にどのような影響を及ぼすか調べてみた。

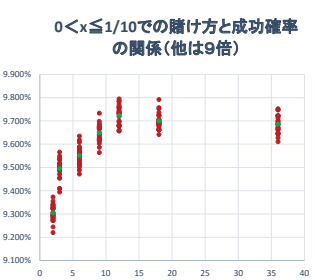
引用元：http://www.cec-gk.jp/casinoroulette.html

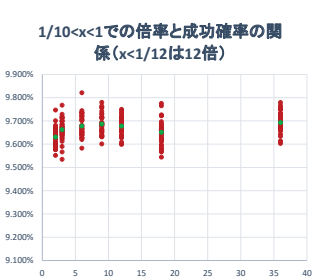
他の賭け方所持金の推移（サンプル100人）





他の賭け方





他の賭け方

- 左のグラフでは目標に対し0<x<1/10の時の賭け方が成功確率にどのような影響を及ぼすのかを示している。
- 12倍（確率3/37）までにおいては順調に成績を伸ばしているが、後半は下降気味である。
- 初めの所持金が目標に対して1/10であるから、9倍までの賭けでは1回の賭けで目標金額まで到達することが出来ず、勝負回数が増えることが影響しているのだろう。
- 右のグラフでは、目標に対し1/10<x<1の場合の賭け方と成功確率の関係を表している。上のグラフと比べると、2,3倍以外に関してもほとんど影響を及ぼしていないことがわかる。
- つまり、不利な状況下の時の判断こそが最も重要で、大胆にいかなければならないという事である。
- 以降は、AとBなど二種類の賭け方が出来る場合についても考えていく予定である。