

# 自己組織化臨界現象と 可換砂山模型

香取眞理

(中央大学工学部物理学科)

Katori, Makoto (Chuo University)

[スライド part 1/5]

青山学院大学 物理・数理学科 コロキウム

2015年度 第7回

2015年10月22日

青山学院大学 工学部 L棟6階 L603室

## 目次:

1. 砂山模型と自己組織化臨界現象
2. 可換砂山模型(ASM)の定義と基本的な性質
3. 可換砂山模型(ASM)と離散ポアソン方程式
4. 再帰的配置と全域木(spanning tree)との1対1対応
5. 砂山(ASP)-全域木(spanning tree)の局所-大域双対性
6. 可換砂山模型(ASM)研究が教えること

# 1. 砂山模型と自己組織化臨界現象

# エネルギーとエントロピー

## 相反する2つの自然法則

**自然法則1:** 自然はエネルギーが低い状態を好む。  
 $E$  が小さい方が良い(負の方が良い)。

**自然法則2:** 絶対零度以外では、自然は乱雑になりたがる。  
この乱雑になりたがる傾向は、絶対温度  $T$   
が上がるほど増す。  
**エントロピー  $S$  増大則**

**熱力学(統計力学): 上の2つの法則の統一理論**

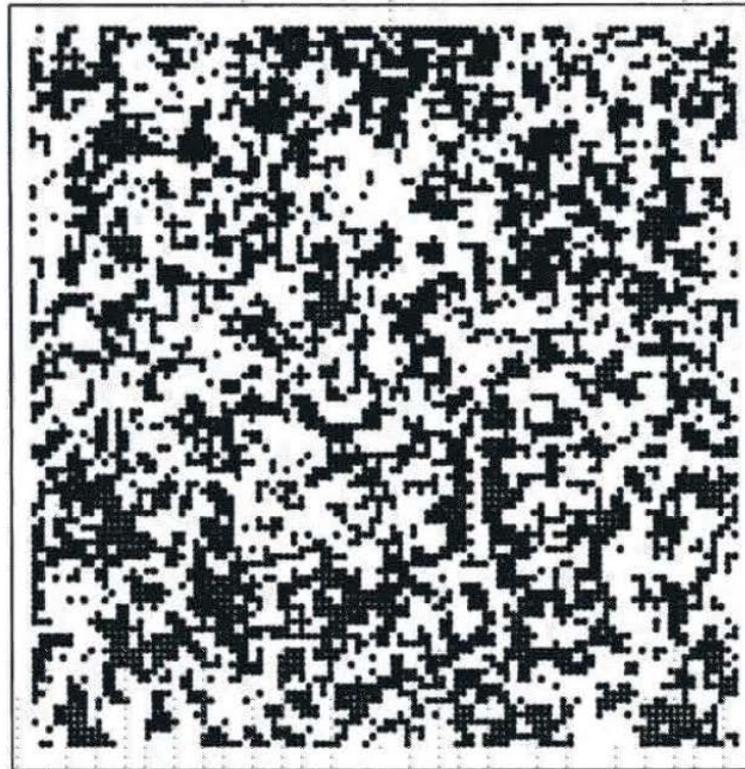
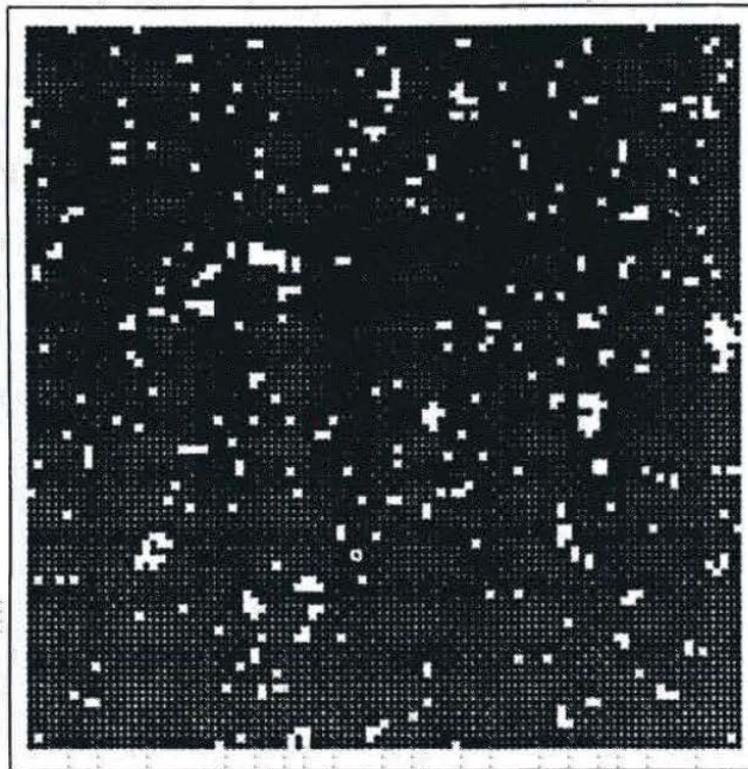
自由エネルギー最小の法則

**$F = E - TS$  ·····** これが小さい(負の)方が良い

# イジングモデル(磁性体のモデル)の計算機シミュレーション

黒 : up spin

白 : down spin



$T < T_c$  (低温相)

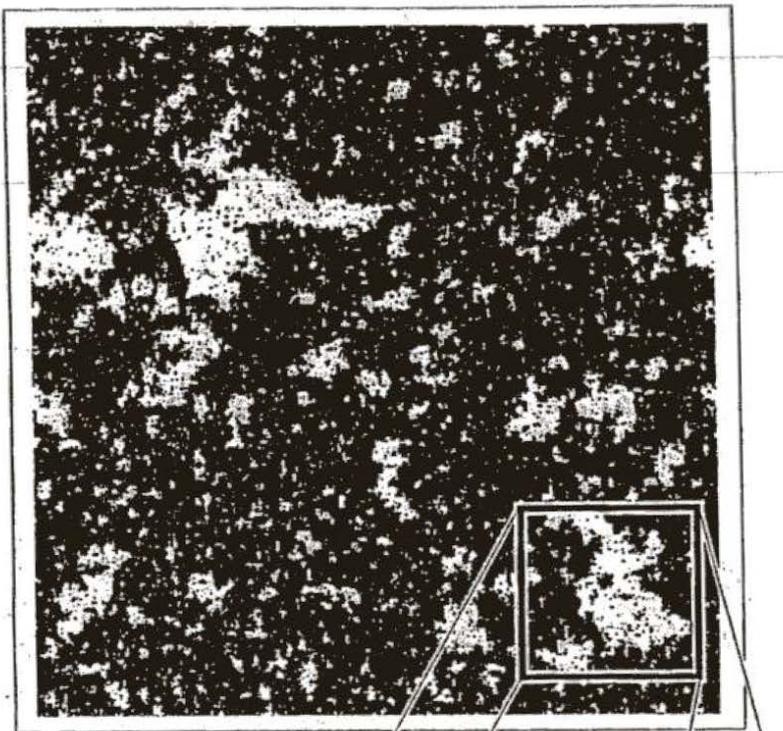
スピンの揃ってエネルギー  $E$  が小

$T > T_c$  (高温相)

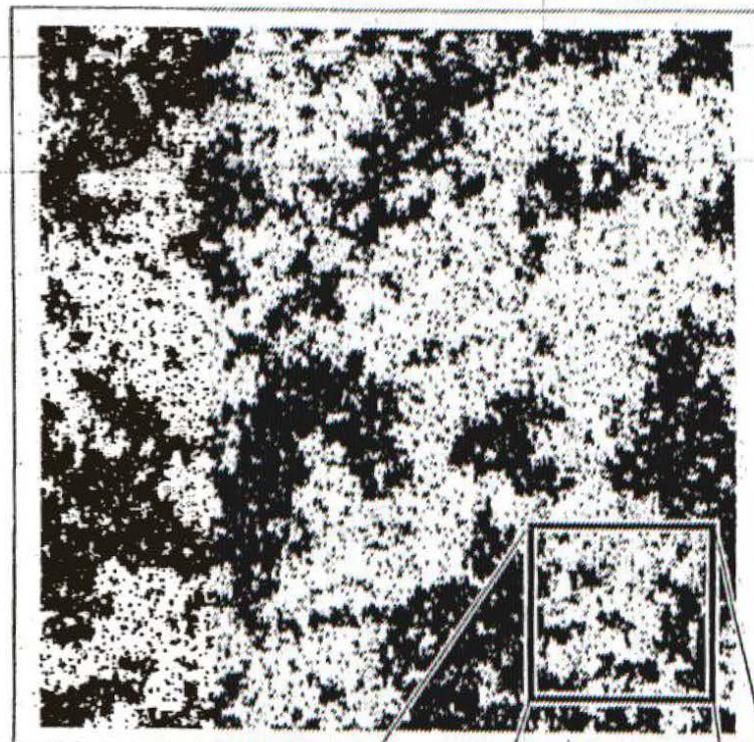
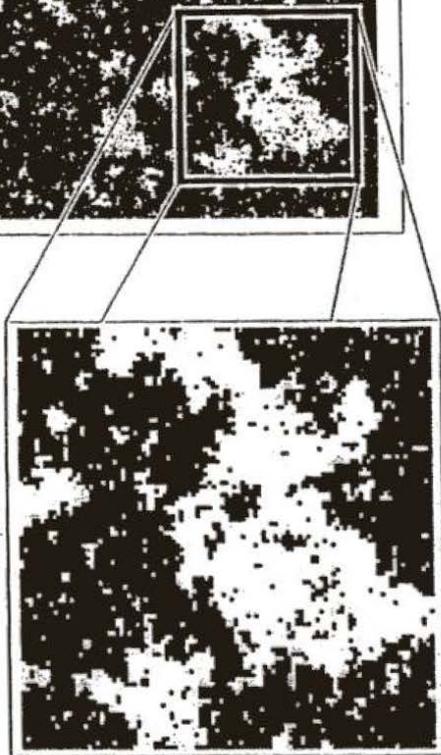
スピンの不揃いでエントロピー  $S$  が大

$T_c$  = 相転移温度 (臨界温度, キュリー温度)

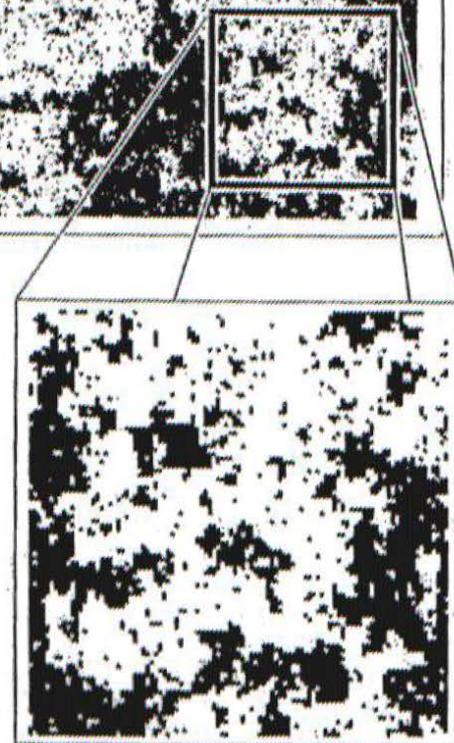
熱力学(統計力学)の大法則  $E$  = エネルギー、 $T$  = 絶対温度、 $S$  = エントロピーとしたとき  
「自由エネルギー最小の原理」  $F = E - TS$

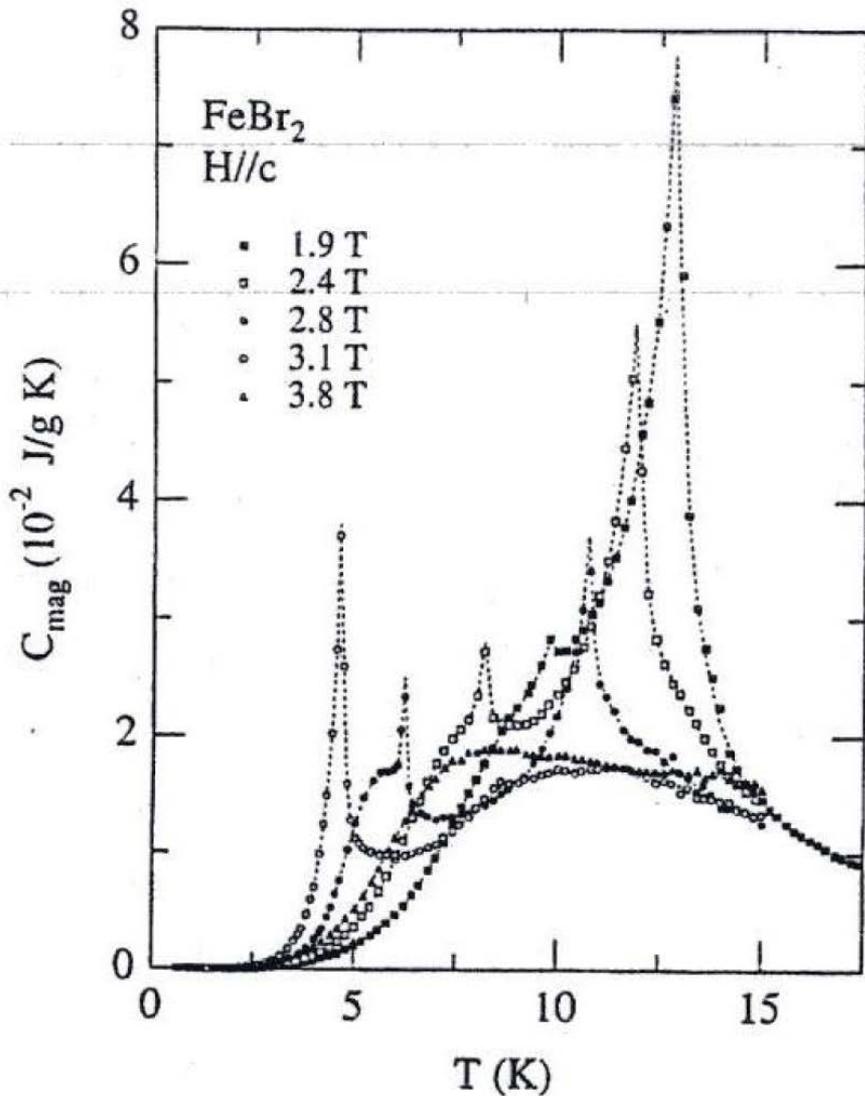


$T < T_c, T > T_c$  では  
特徴的な  
スケールを  
もってしまう



$T = T_c$  では  
スケール不変性  
(フラクタル構造)





磁性体の相転移点(臨界点)では  
帯磁率や比熱といった  
応答関数が発散する。

異常応答 ……臨界現象の一つ  
critical phenomena

図 4: FeBr<sub>2</sub> の磁場中相転移. 横軸は温度, 縦軸は磁気比熱. いろいろな磁場の大きさ(テスラ T)での結果を重ねて描いてある. (Aruga Katori, Katori, Katsumata, *Phys.Rev.B* 54 (1996) R9620 より)

# 臨界点でのフラクタル性

$T_c$  = Curie Temperature (キュリー温度)  
ピエール・キュリー(マリー・キュリーの旦那)

ちょうど  $T=T_c$  のときのスピン配置は  
フラクタル的(自己相似性を持つ) になっている。

比較: フラクタル図形の例: Sierpinski の3角形  
次元  $D=\log 3/\log 2=1.58\dots$

# フラクタル図形

(自己相似性＝拡大・縮小しても同じように見える)

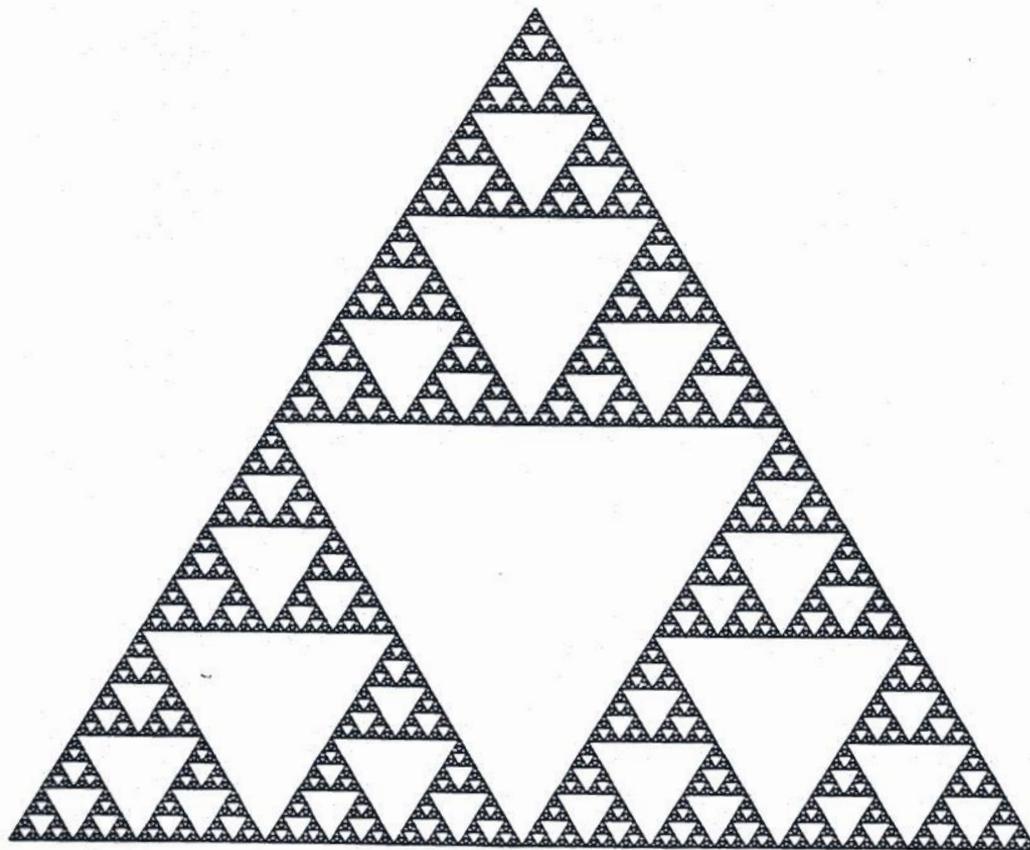
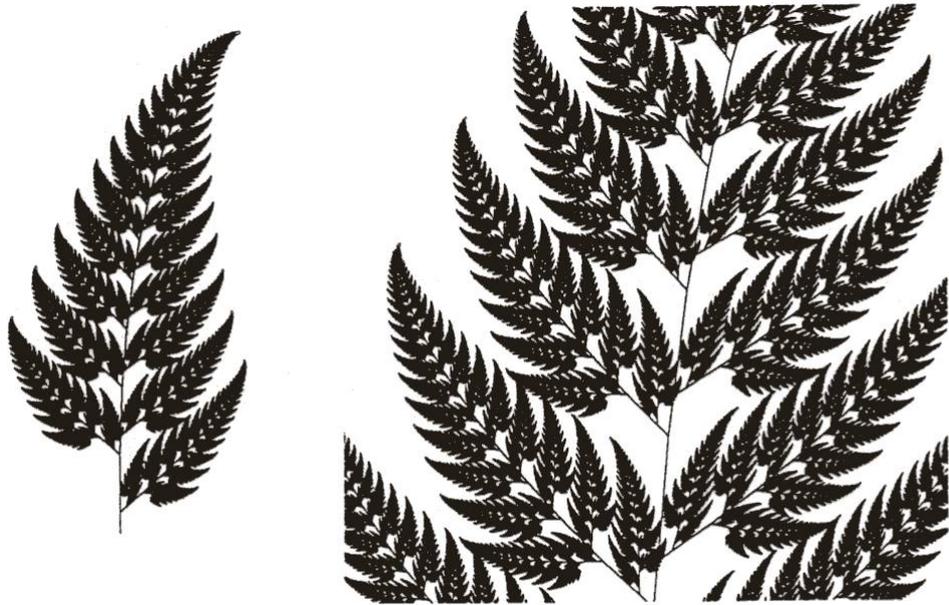
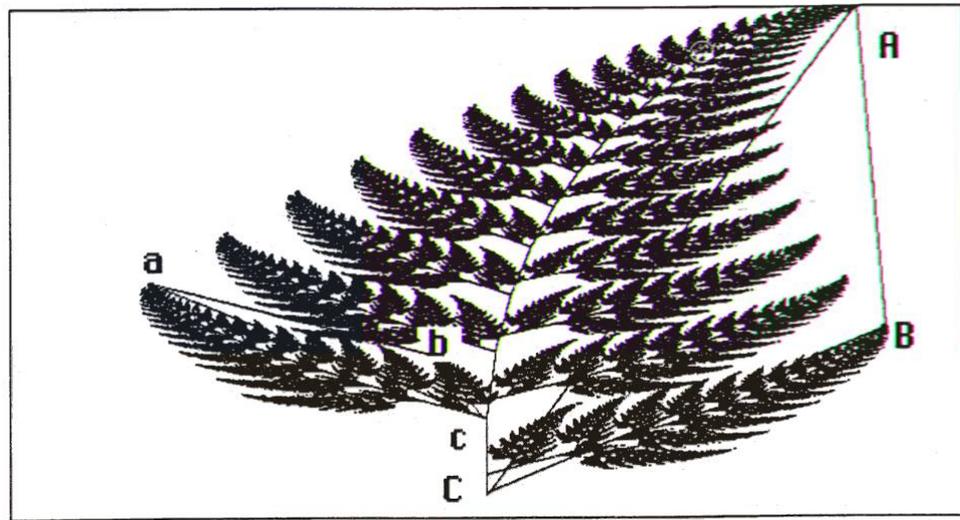


図1・5 シェルピンスキーの三角形



# 森林生態系とイジング模型

Neotropical forest

in Barro Colorado Island, Panama

50 ヘクタール (500 m × 1000 m) の熱帯季節林

Data: S.P. Hubbell and R. B. Foster, 1986 年発表

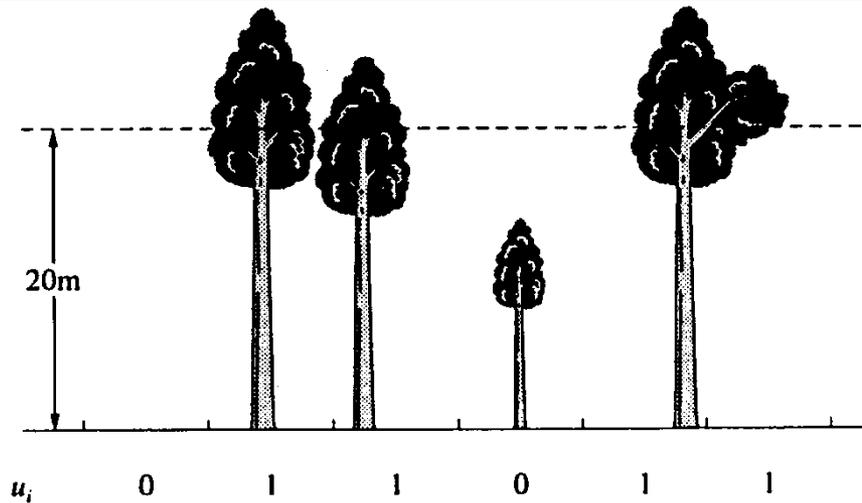


図2・13 林冠サイトと林冠ギャップサイト

小調査区 (5 m × 5 m) に分割

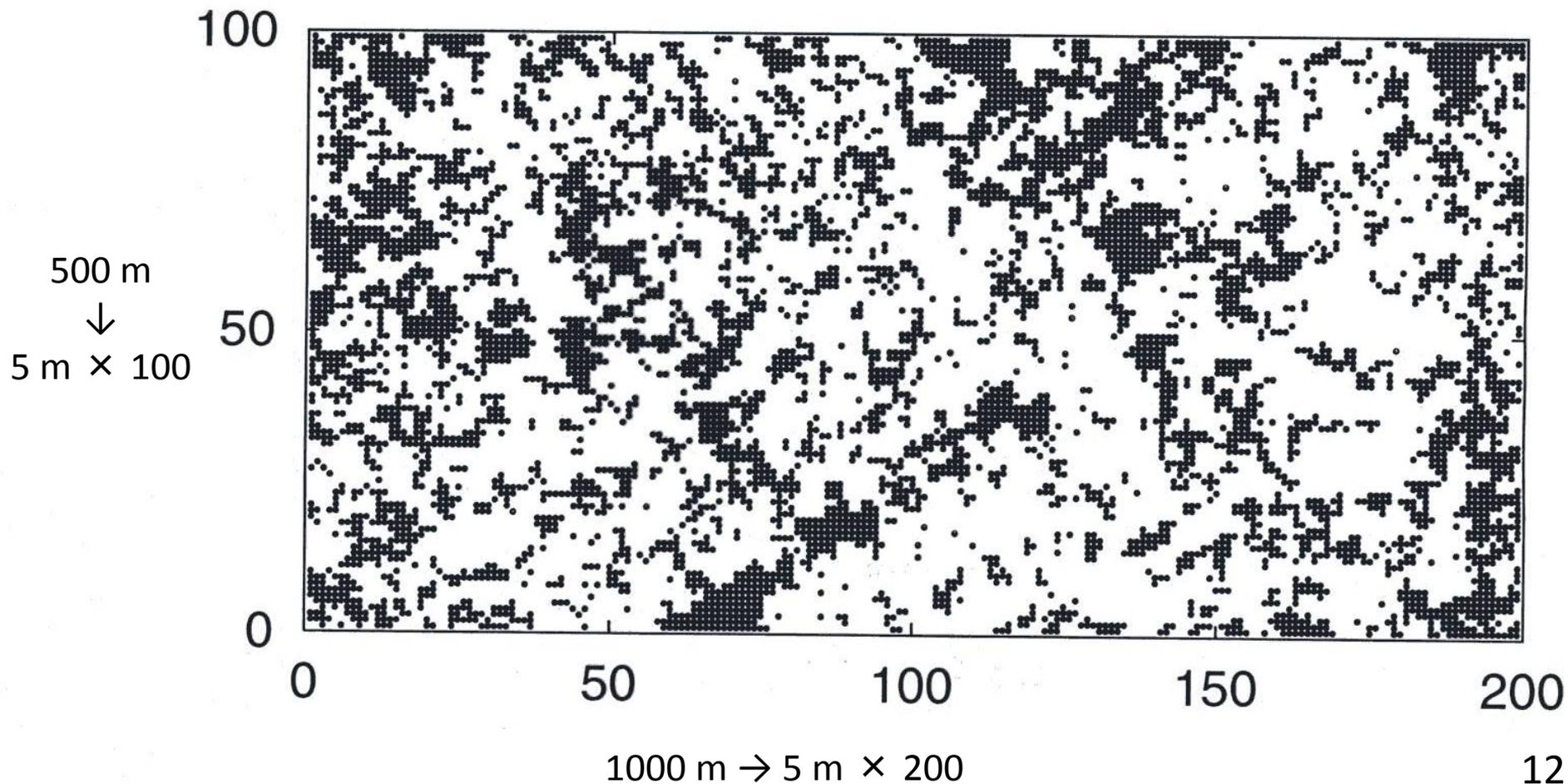
**Canopy-gap (林冠ギャップ) サイト** = 最高樹高 < 20 m の小調査区のこと

# 1983年 調査結果

黒 林冠ギャップサイト 樹高 < 20 m

白 林冠サイト 樹高 > 20 m

調査区 200 × 100 サイト



## 小川森林保護区(日本)

555 m × 455 m  
小調査区 5 m × 5 m

航空写真からデータ化

5年毎に調査

1976年

1981年

1986年

1991年

田中氏、中静氏  
京都大学、森林総研

林冠ギャップサイト  
= 最高樹高 < 15 m

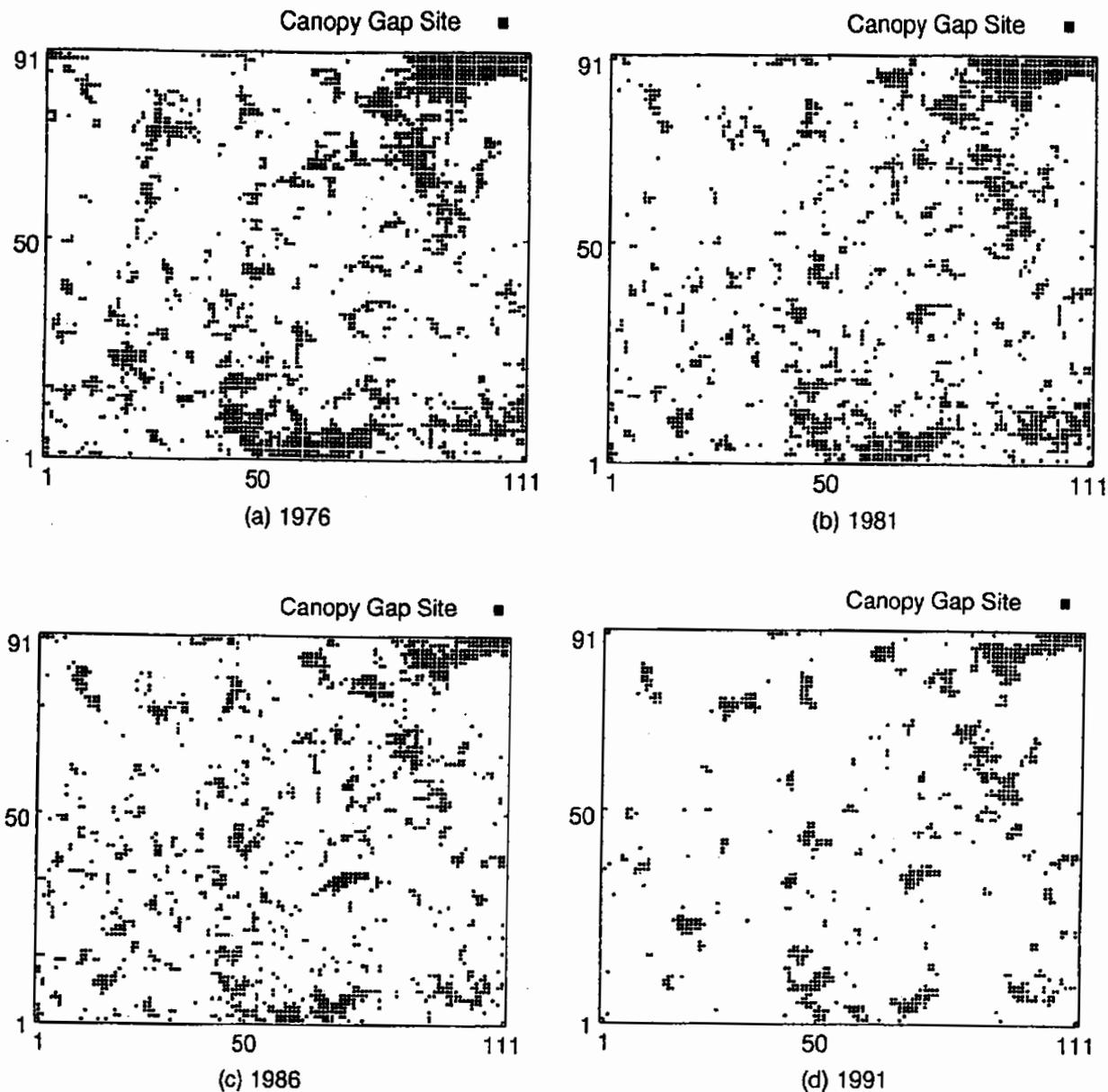
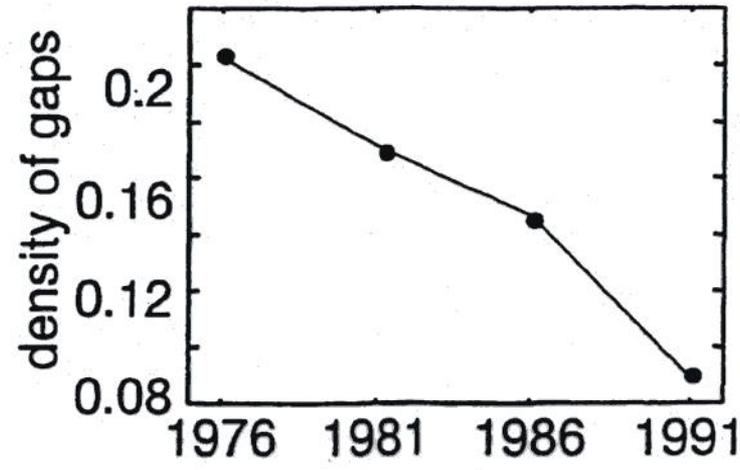
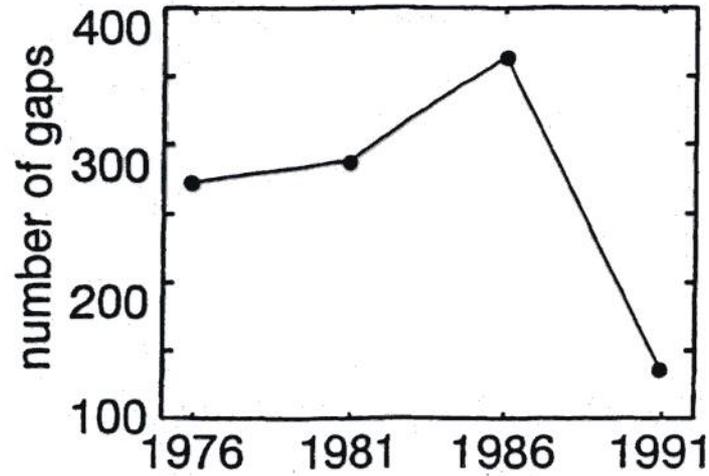


Fig. 3. 555×455 m digitized maps of the deciduous forest on Ogawa Forest Reserve (OFR), Japan, in (a) 1976, in (b) 1981, in (c) 1986 and in (d) 1991.<sup>1)</sup> Gap sites, 5×5 m subplots in which there is no canopy higher than 15 m, are plotted by black dots.



(a)



(b)

Fig. 5. The time dependence of (a) a density of gaps  $\rho_0$  and (b) a total number of gaps  $n_0$  of OFR.

# Barro Colorado Island (1983)

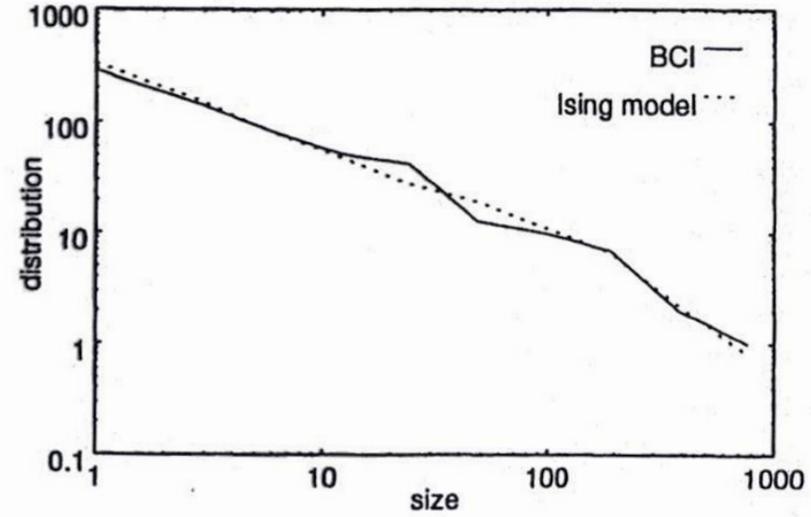
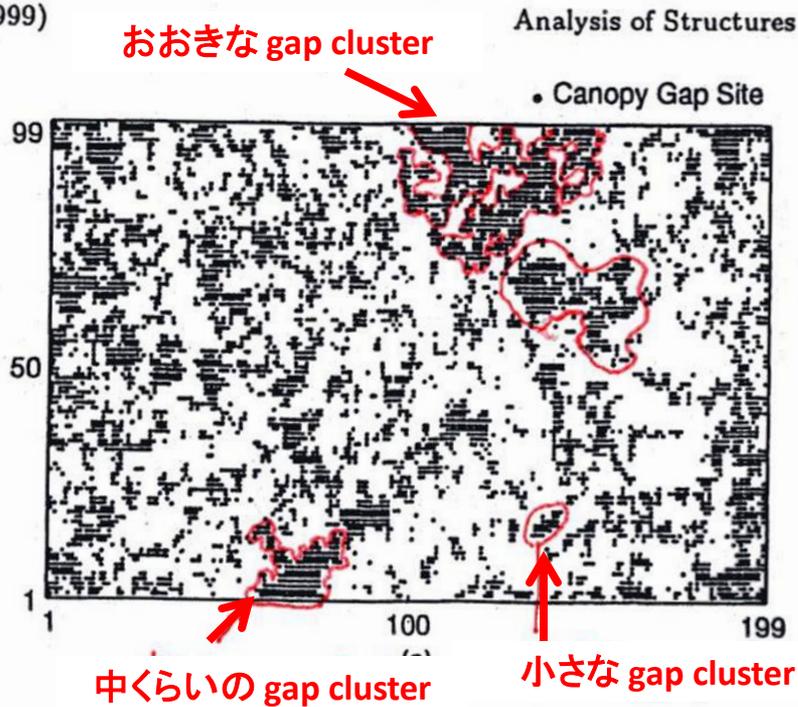


Fig. 2. Log-log plot of the gap-size distribution for BCI and the cluster-size distribution of down spins in the Ising-Gibbs state with  $K = 0.37$  and  $h = 0.016$ .<sup>11)</sup> The size of the gap cluster (down-spin cluster) is determined with Neumann neighborhood. For the Ising-Gibbs state, we performed the Monte Carlo simulations on a  $700 \times 700$  square lattice with the periodic boundary condition and averaged over 10 data, each of which is obtained after discarding 1500 Monte Carlo steps. Clusters contained in a  $199 \times 99$  region on the lattice are counted and the points in the distribution have been logarithmically binned in boxes of powers of two.

Fig. 1.  $1000 \times 500$  m digitized map of the neotropical forest in Barro Colorado Island, Panama, in 1983.<sup>2,4)</sup> Gap sites,  $5 \times 5$  m subplots in which vegetation height is less than 20 m, are plotted by black dots.

林冠ギャップのかたまり(クラスター、cluster)のサイズ  $S$  の分布  
両対数グラフでほぼ一直線

Ogawa Forest Reserve  
[小川群落保護林  
(茨城県)]

林間ギャップの  
クラスターサイズ分布



どれも両対数グラフで  
ほぼ直線

分布関数

$$f(s) \sim s^{-\tau}$$

べき乗分布則

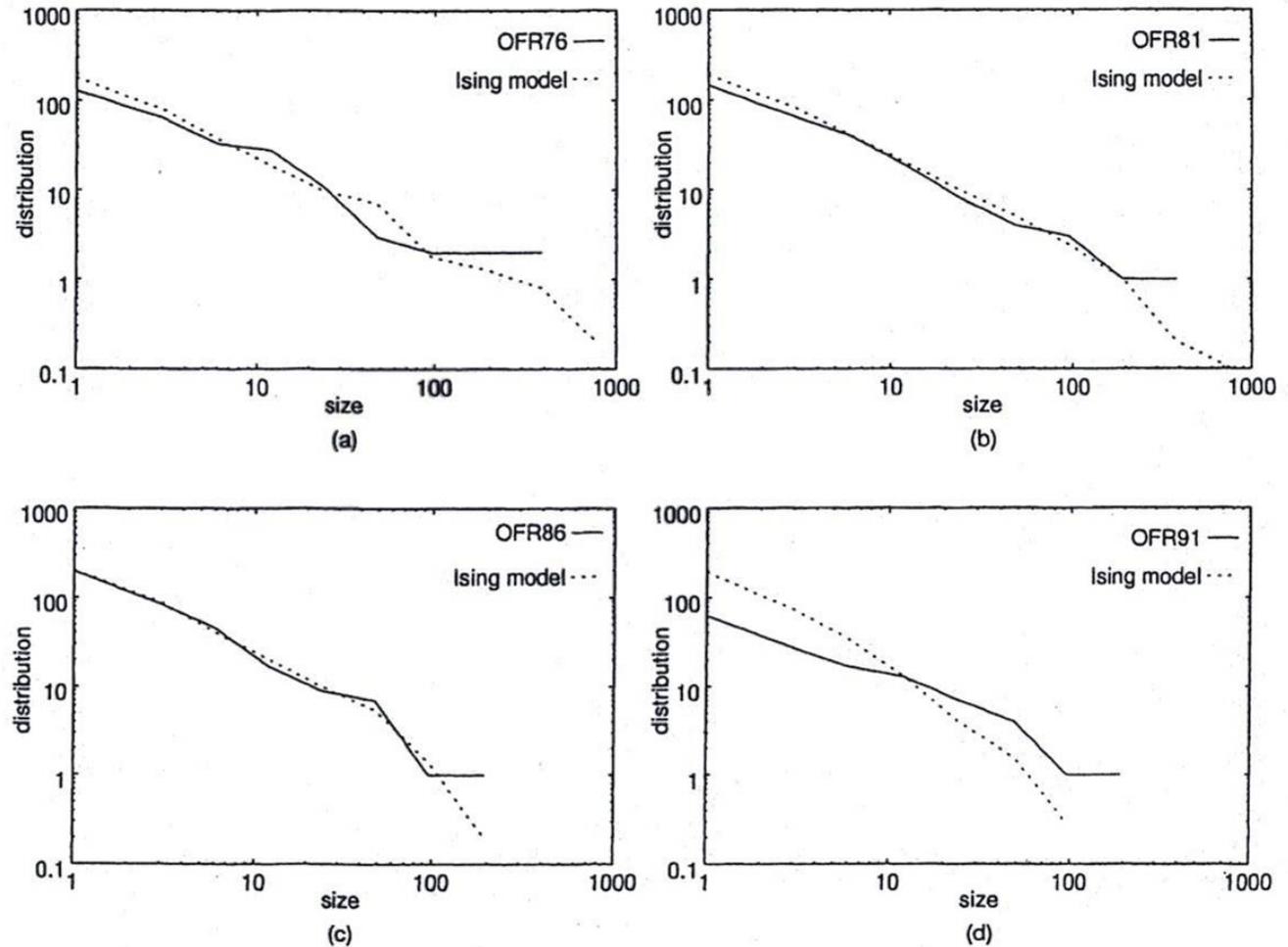


Fig. 4. Log-log plots of the gap-size distributions for OFR in (a) 1976, in (b) 1981, in (c) 1986 and in (d) 1991, and those of the cluster-size distributions of down spins in the Ising-Gibbs states with  $K$  and  $h$  listed in Table I. For the Ising-Gibbs states, the Monte Carlo simulations were performed and clusters contained in a  $111 \times 91$  region on the  $700 \times 700$  lattice were counted. The points in the distribution have been logarithmically binned in boxes of powers of two.

## べき乗分布則

$$f(s) \sim s^{-\tau}$$

指数  $\tau$  の値

BCI

OFR 86, 76

ともに約 1.7

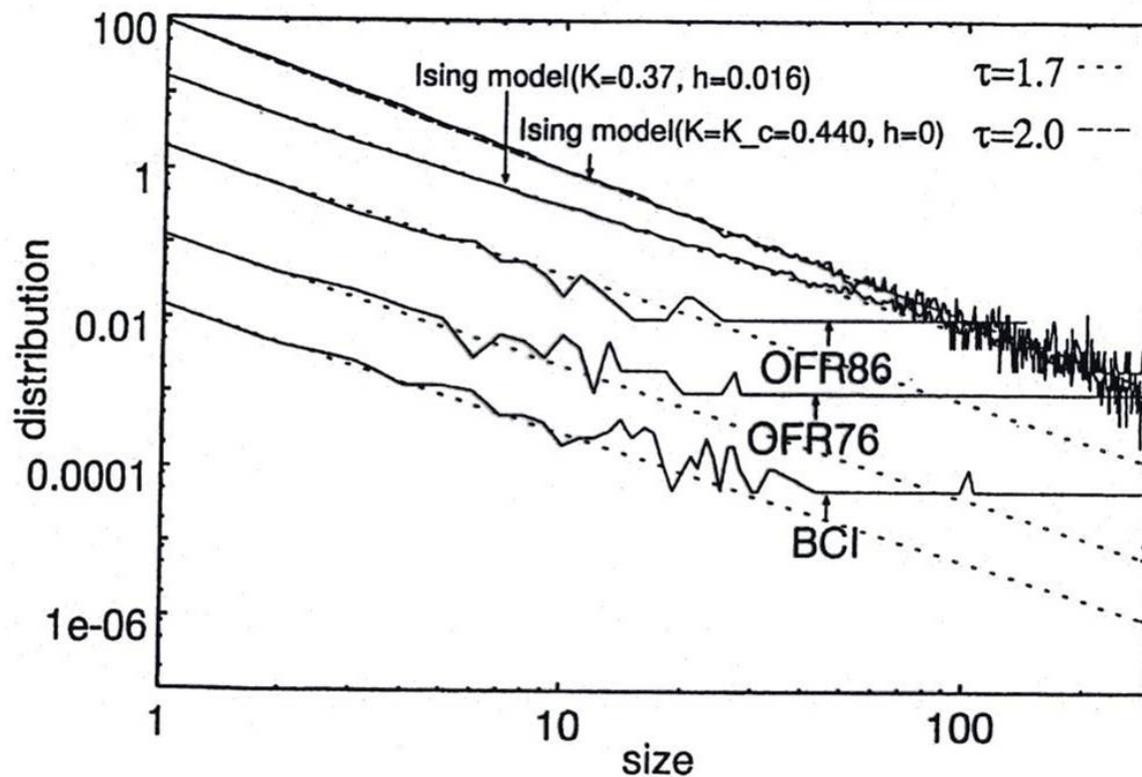


Fig. 6. From the bottom to the top, the gap-size distribution  $f_f(s)$  for BCI,  $f_f(s)$  for OFR in 1976, in 1986, the cluster-size distribution of down spins  $f_{IG}(s)$  of the Ising model with  $K = 0.36$  and  $h = 0.016$  and  $f_{IG}(s)$  with  $K = K_c = 0.440$  and  $h = 0$ . These are shifted upward in order to see them easily. The points in the distributions are not logarithmically binned. The distribution at the top is fitted by a size to the power of 2.0. Other four distributions are fitted by a size to the power of 1.7.

# 自己組織化臨界現象

## Self-Organized Criticality (SOC)

P. Bak の造語 (1987)

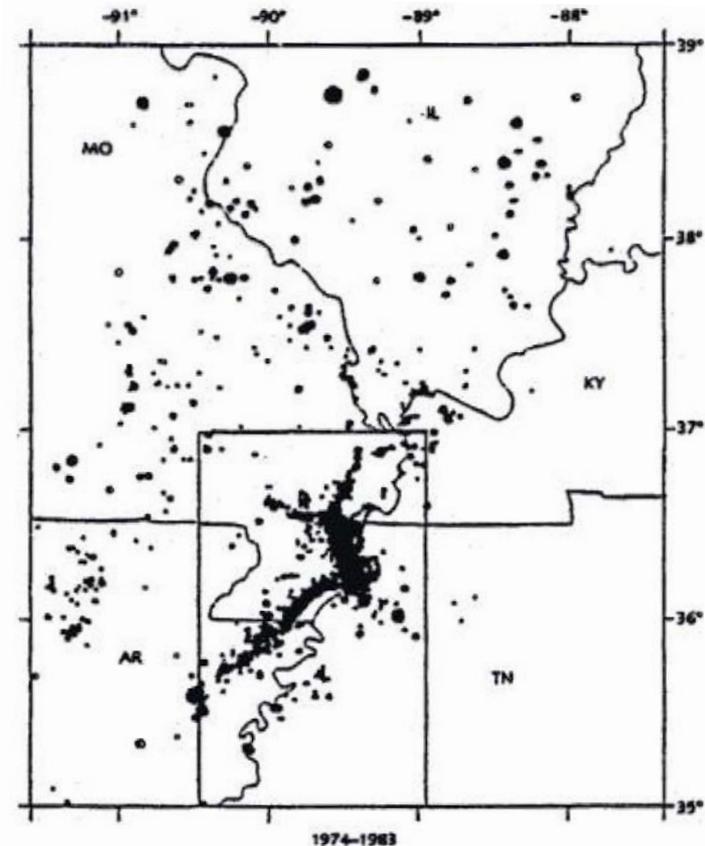
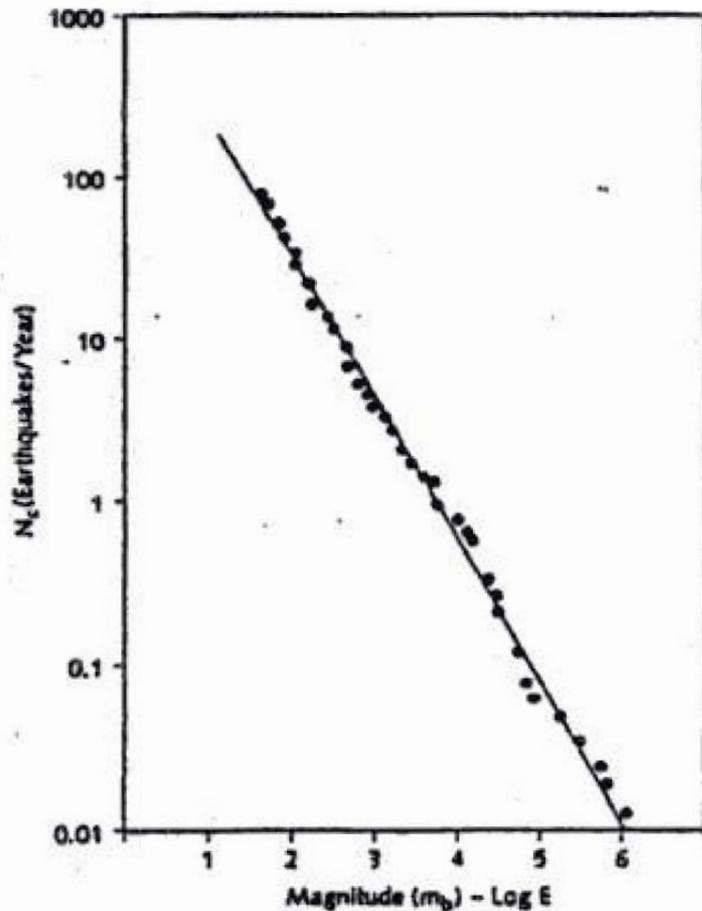
自己組織化 + 臨界現象？

**自己組織化**: 外部からのコントロールを受けることなく, 自発的にシステムがある構造を形成し, 秩序だった状態に発展していくこと.

(例) 受精卵 ⇒ 分割 ⇒ 分化

**相転移に伴う臨界現象**: 2次相転移点 (臨界点) でのみ見られる現象. 温度, 圧力, 磁場などの外部パラメータをある値にチューニングして初めて実現する. よって, 自己組織的とは言えない.

# 実は SOC は自然界に多く見られる.



## 地震の Gutenberg-Richter 則 (P. Bak (1997) より)

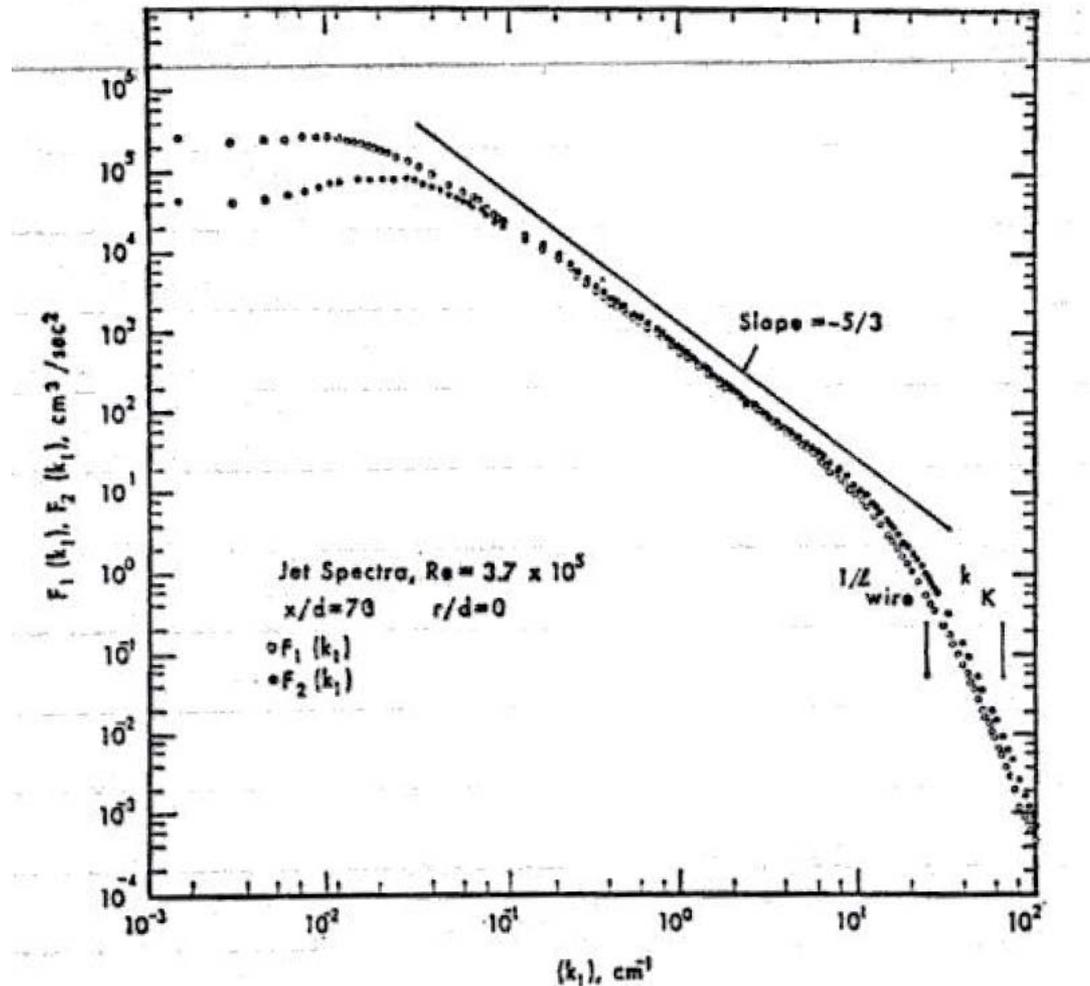
左図: 横軸は地震のマグニチュード  $m$  (地震のエネルギーの log),  
縦軸はマグニチュードが  $m$  以上の地震の1年間の発生頻度の log.

右図: 地震発生地点の地図上のプロット(アメリカ, 1974-1983)

# 乱流における Kolmogorov の - 5/3乗則

横軸: 波数の log, 縦軸: エネルギー散逸量の log.

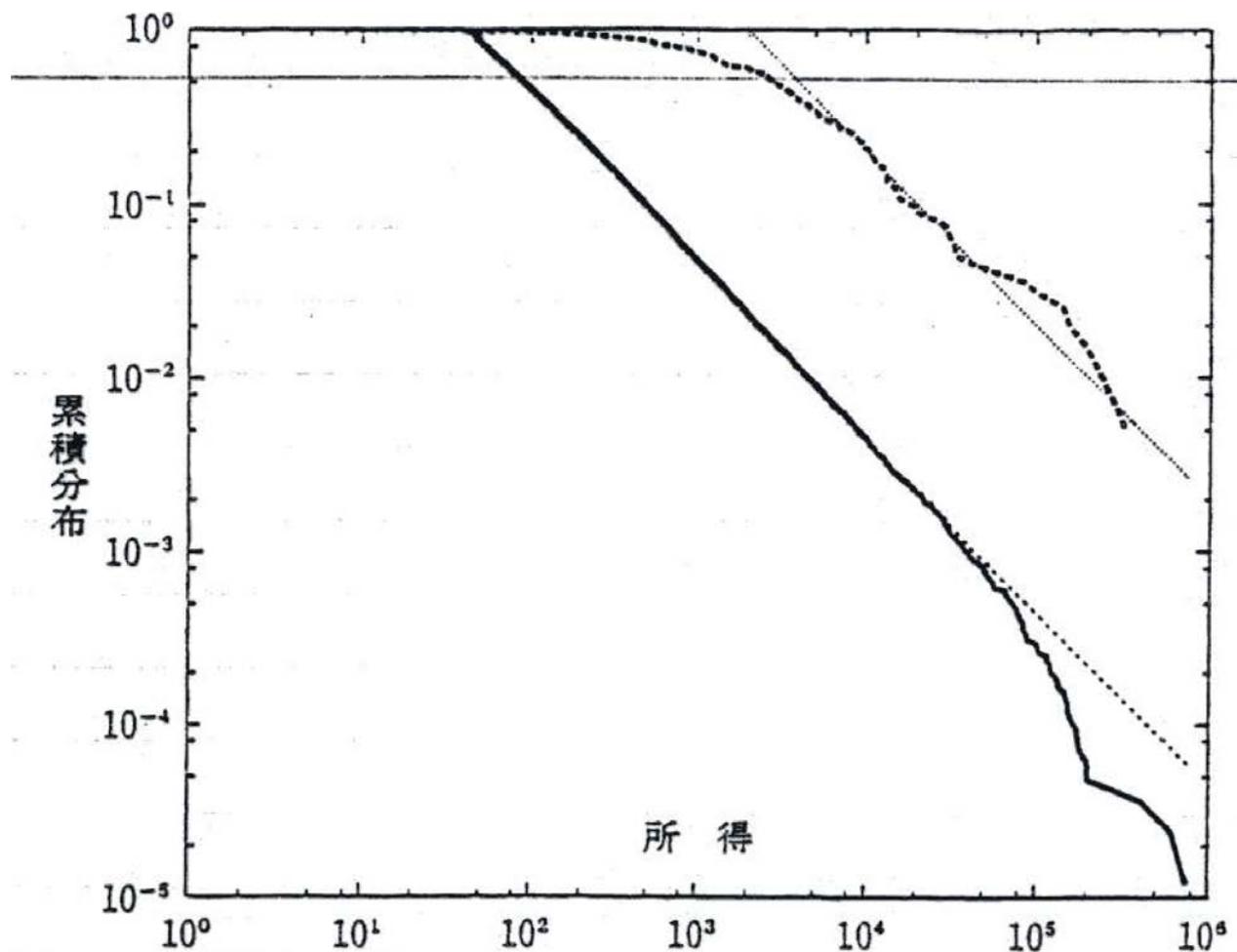
(高安秀樹 (1986) より)

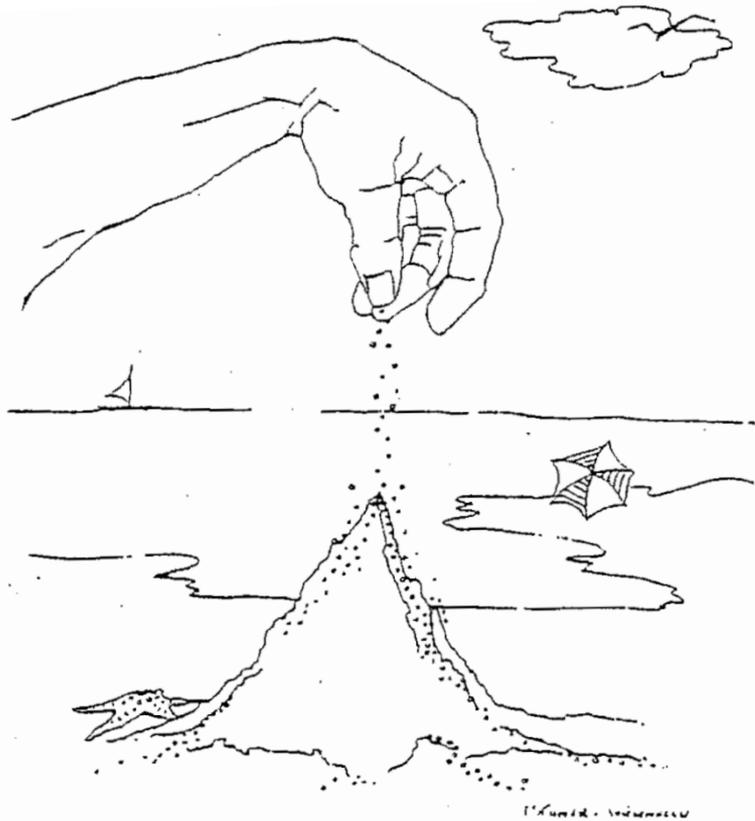


# 企業の所得分布 (1997年度, 実線は日本, 点線はイタリア)

横軸: 所得(金額)のlog, 縦軸: 累積分布のlog.

(高安秀樹, 高安美佐子 (2000) より)





安息角＝その角度よりも傾斜がなだらかな間は、砂の堆積により傾斜が大きくなる。しかし、これを超えて傾斜が急になるとなだれ(土砂崩れ)が起こる。

自然と安定な角度へ

⇒ 砂山の形: 相似形

⇒ この形を保つために: なだれの規模は大きく分布する(べき乗則)

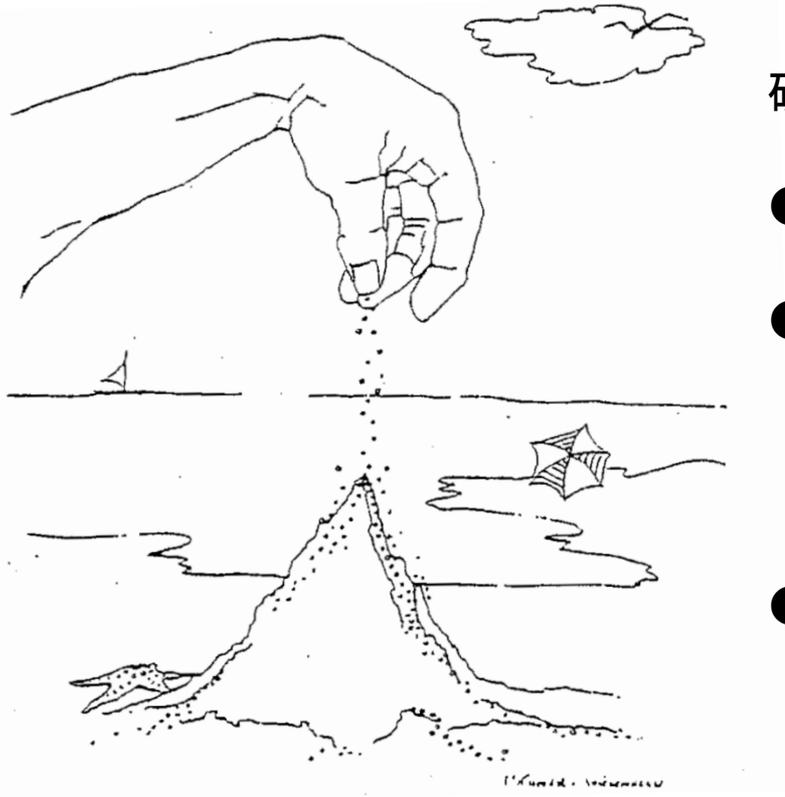
キーワード: **なだれ=avalanche**

砂山崩しモデル (sandpile model)  
=SOCの典型例

◎ **開放系: 散逸構造の一種**

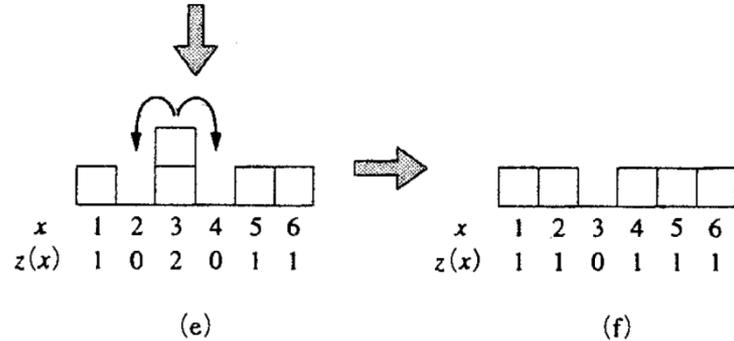
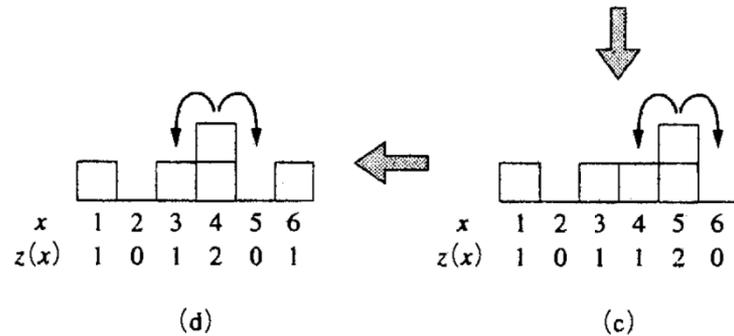
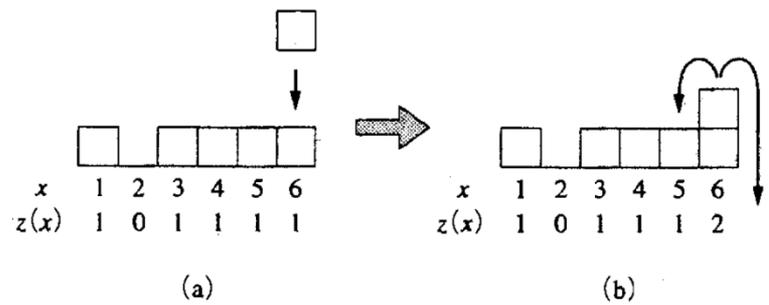
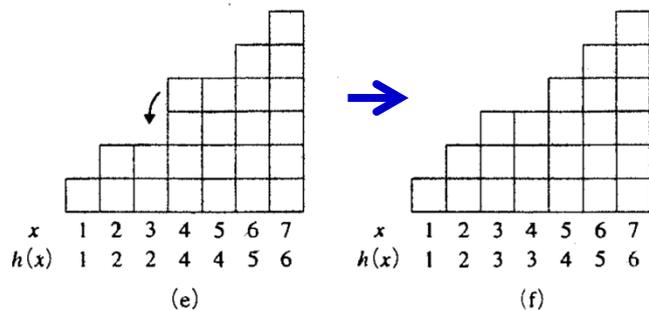
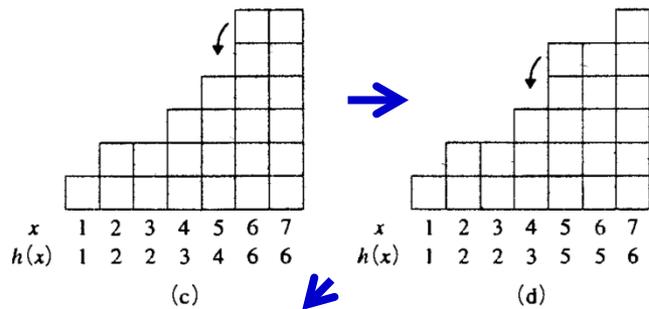
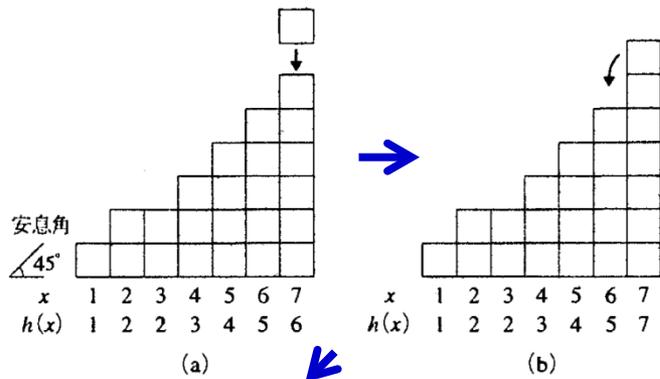
砂山遊びの図 (K. Wiesenfeld et al.: J. Stat. Phys. **54**, 1441 (1989) より引用)

Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K.: Phys. Rev. Lett. **59**, 381-384 (1987).



## 砂山崩しのモデル化

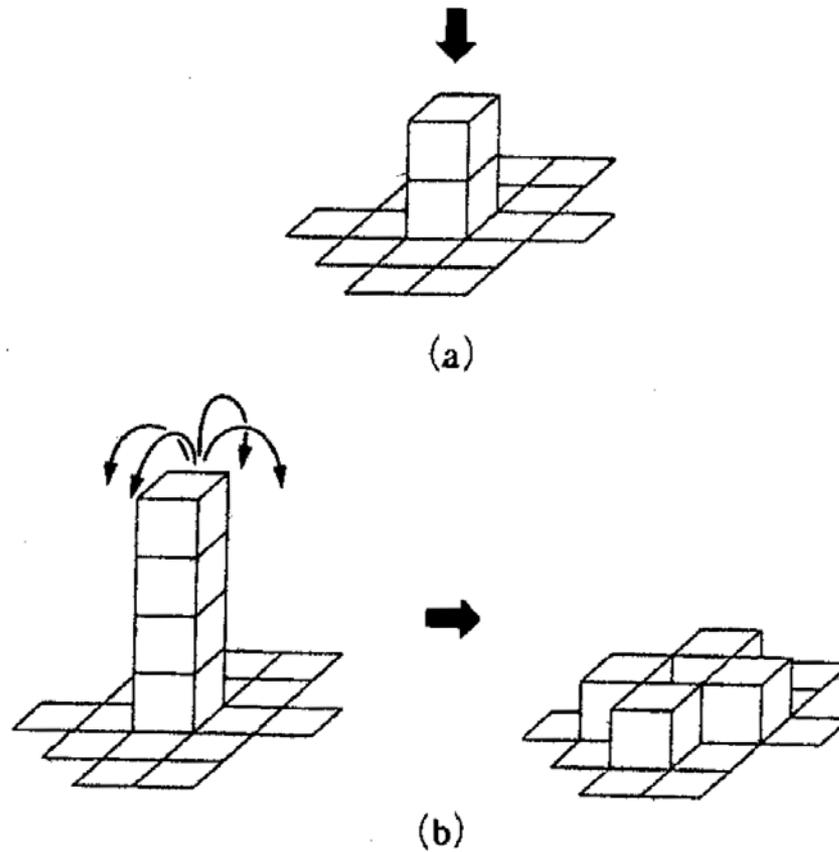
- まず1次元系(断面)を考える.
- **粗視化 (coarse graining)**したモデル
  - 空間 ⇒ 格子
  - 砂 ⇒ ある量の集まりを1ブロックとする
  - 安息角 ⇒  $45^\circ$  とする
- 転げ落ちる = **toppling** という



「粗視化」した砂山断面の時間発展：  
 砂塊の1単位を四角で表現。  
 砂塊を加えた結果、安息角を超えると倒壊。  
 倒壊は連鎖的に起こる。  
 この連鎖を「なだれ」とよぶことにする。

左の各格子上の「高さ」の差の時間発展を描いた：  

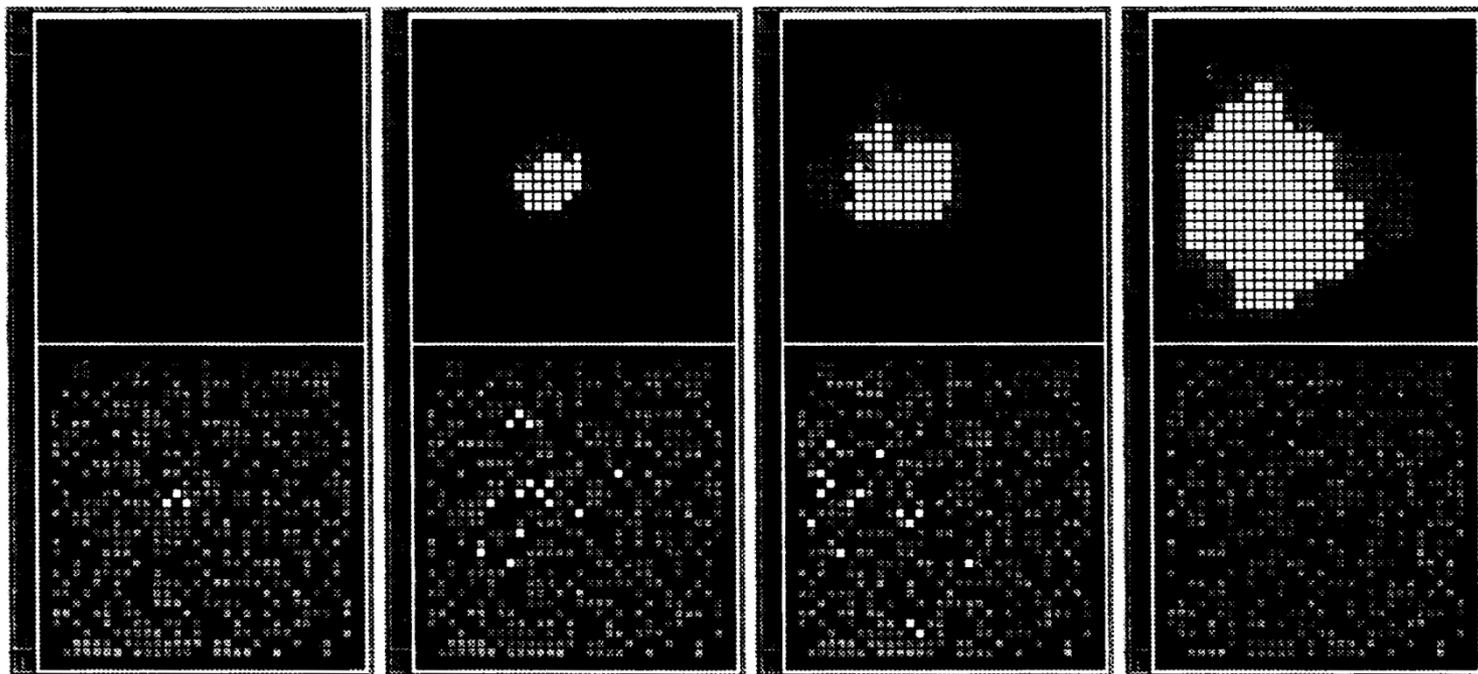
$$z(x) = h(x+1) - h(x)$$
 各格子点上の値が「2単位」になると不安定化して、  
 左右に「1単位」ずつばらける。



## 2次元正方格子上的 Bak-Tang-Wiesenfeld (BTW) 模型の素過程

(a) 格子点に「1単位」を加える。

(b) 格子点上の値が「4単位」になったら不安定化して、  
四方に「1単位」ずつばらける。

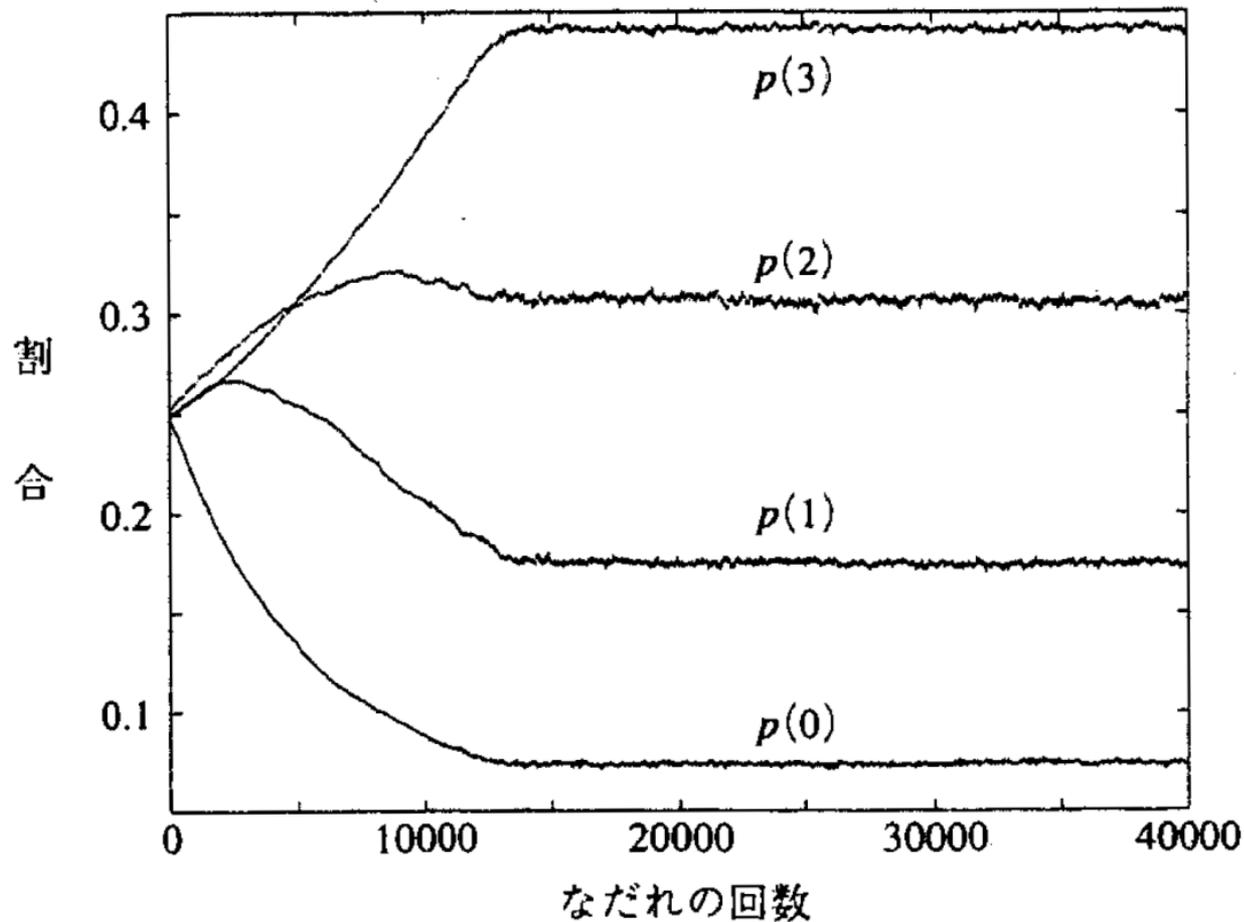


—— 時間 ——>

計算機シミュレーションの図：

[上] 波の広がる様子

[下] 各格子点上の値の時間発展

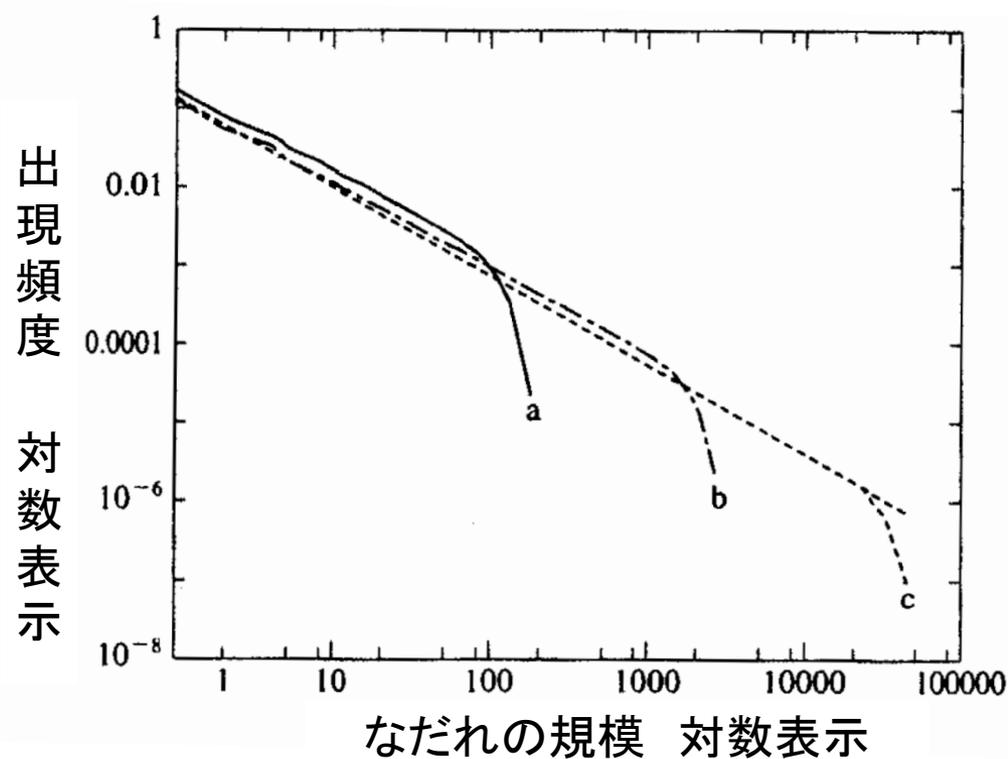


2次元正方格子上的 BTW 模型の各格子点上の安定な値は 0, 1, 2, 3 である.

(4 になると不安定化して倒壊する.)

$p(k)$  は値が  $k$  の格子点数の全対数に対する割合 ( $k = 0, 1, 2, 3$ ).

なだれを繰り返すうちに, 定常分布に近づいていく.



定常分布において、ランダムにサイトを選んで「1単位」を加える。  
その結果起こるなだれの規模分布を両対数グラフで表した。

正方格子のサイズ  $L$  を大きくする ( $a : L = 16, b : L = 64, c : L = 256$ ) と、直線部分が長くなっていく。  
つまり、なだれの規模は冪乗分布に従う。

冪乗分布は、定常分布が何か臨界的な状態であることを示唆している。  
温度のような外部パラメータを臨界値に合わせることなく、臨界状態になる。  
これを Bak らは自己組織化臨界現象 (**Self-Organized Criticality**) とよんだ。