自己組織化臨界現象と可換砂山模型

香取眞理
（中央大学理工学部物理学科）
Katori, Makoto (Chuo University)

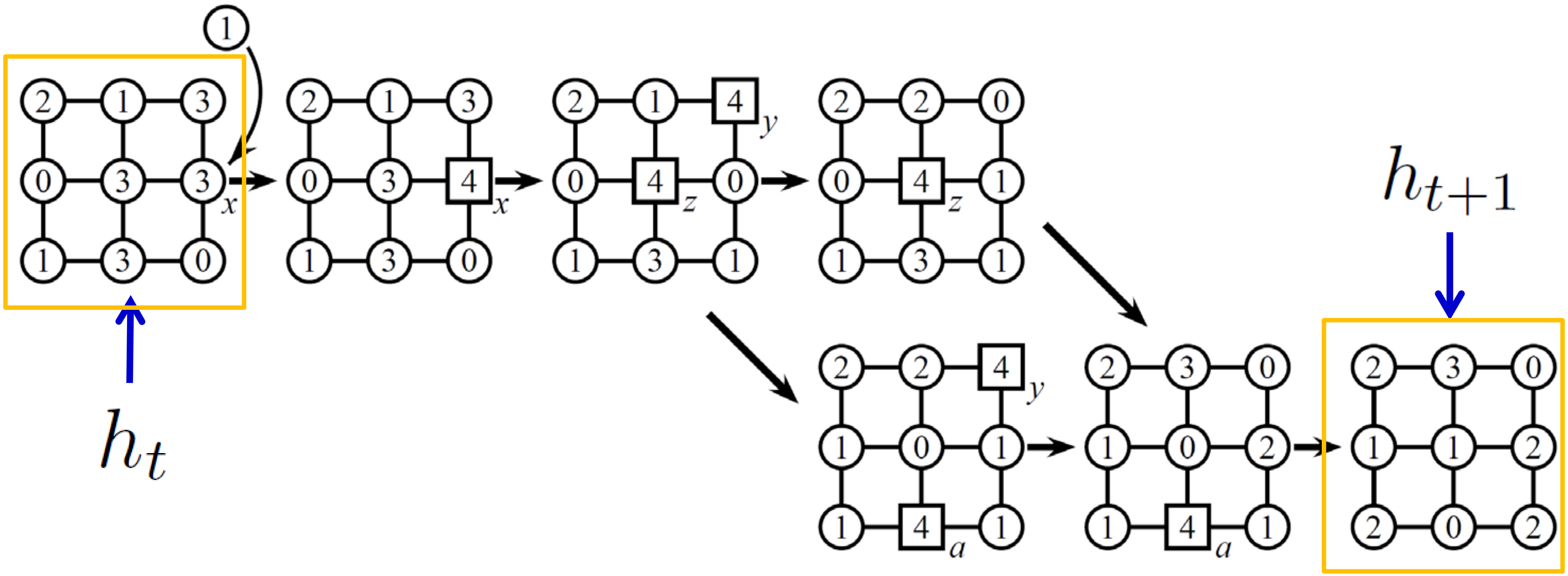
[スライド part 3/5]

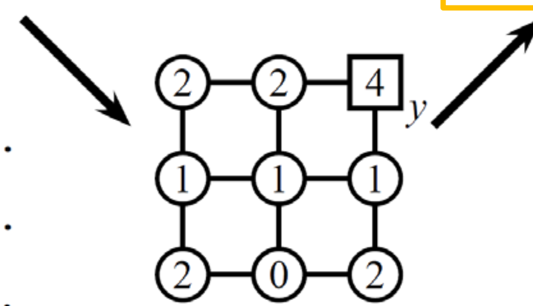
青山学院大学 物理･数理学科　コロキウム
2015年度 第7回

2015年10月22日
青山学院大学　理工学部　L棟6階　L603室

目次:

2.3 toppling と「なだれ」の順番の可換性





上段：格子点 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{a}$ の順に topple した場合.

中段：格子点 $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{a}$ の順に topple した場合.

下段：格子点 $\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{a}, \mathbf{y}$ の順に topple した場合.

- Dhar (1990) に従って，「**なだれ演算子**」を導入する．
  $\mathbf{x} \in \Lambda$ が摂動を加える格子点（砂粒を 1 つだけ加える）．
  これにより，$h_t \in \mathcal{S} \mapsto h_{t+1} \in \mathcal{S}$ と遷移するとき，これを次のように書く：

$$\boxed{h_{t+1} = a(\mathbf{x}) h_t}$$

- 前述の toppling の順番の可換性

$$+$$

$a(\mathbf{x})$ は toppling の連鎖であること

$$\Downarrow$$

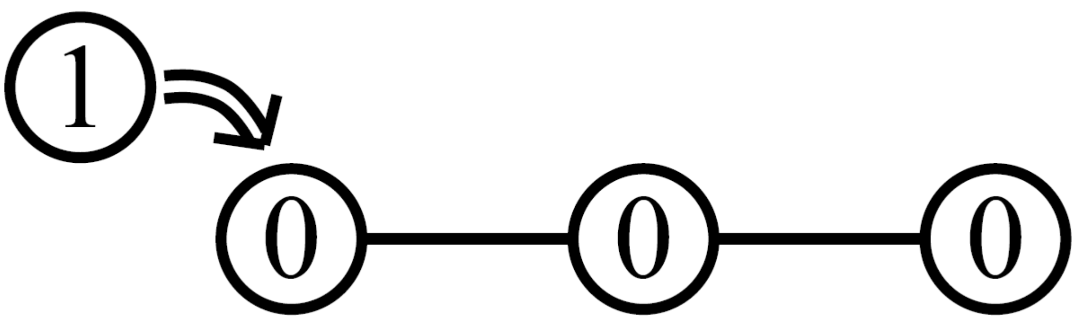
$$\boxed{[a(\mathbf{x}), a(\mathbf{y})] \equiv a(\mathbf{x})a(\mathbf{y}) - a(\mathbf{y})a(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda.}$$

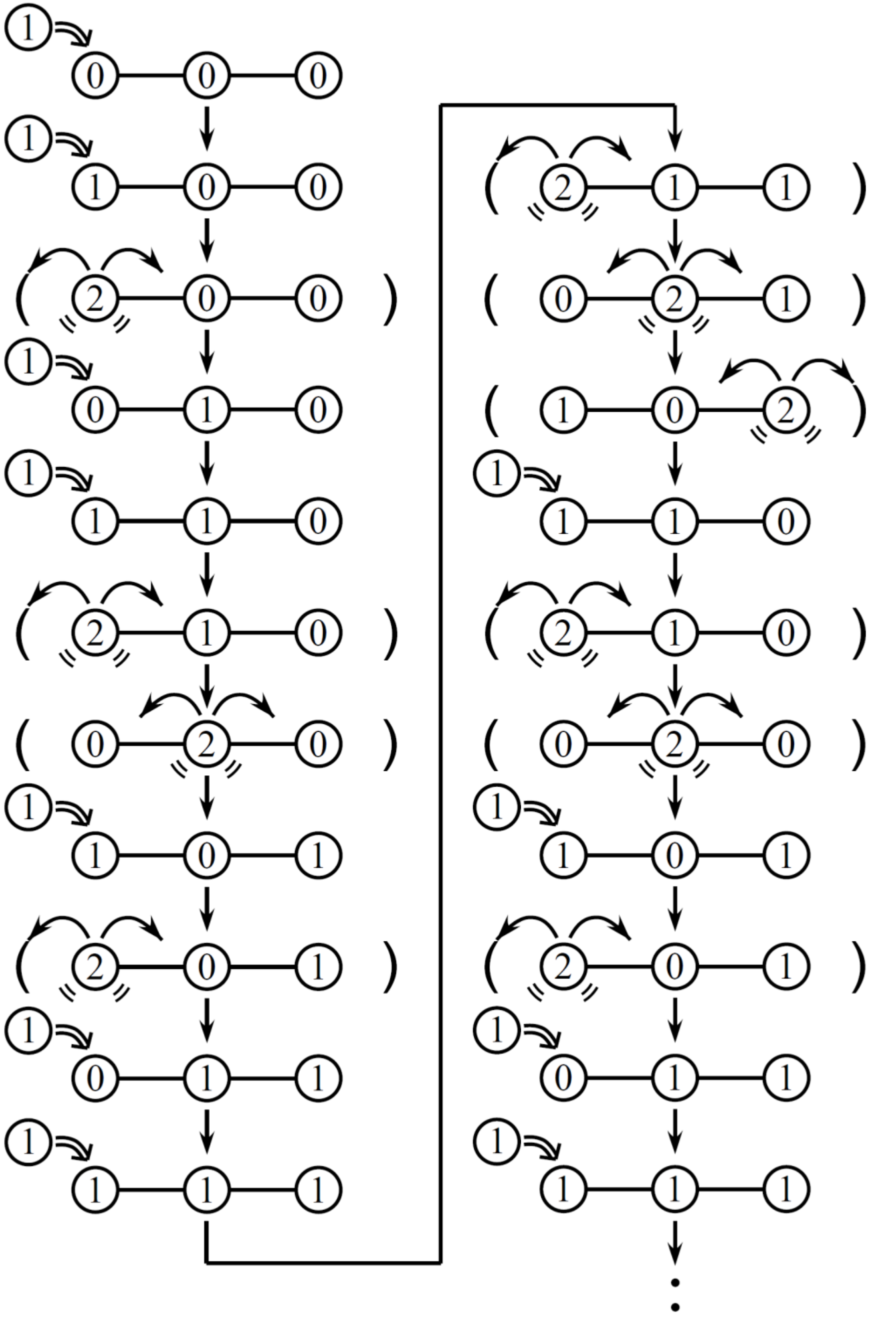
Abelian Sandpile Model（可換砂山模型）

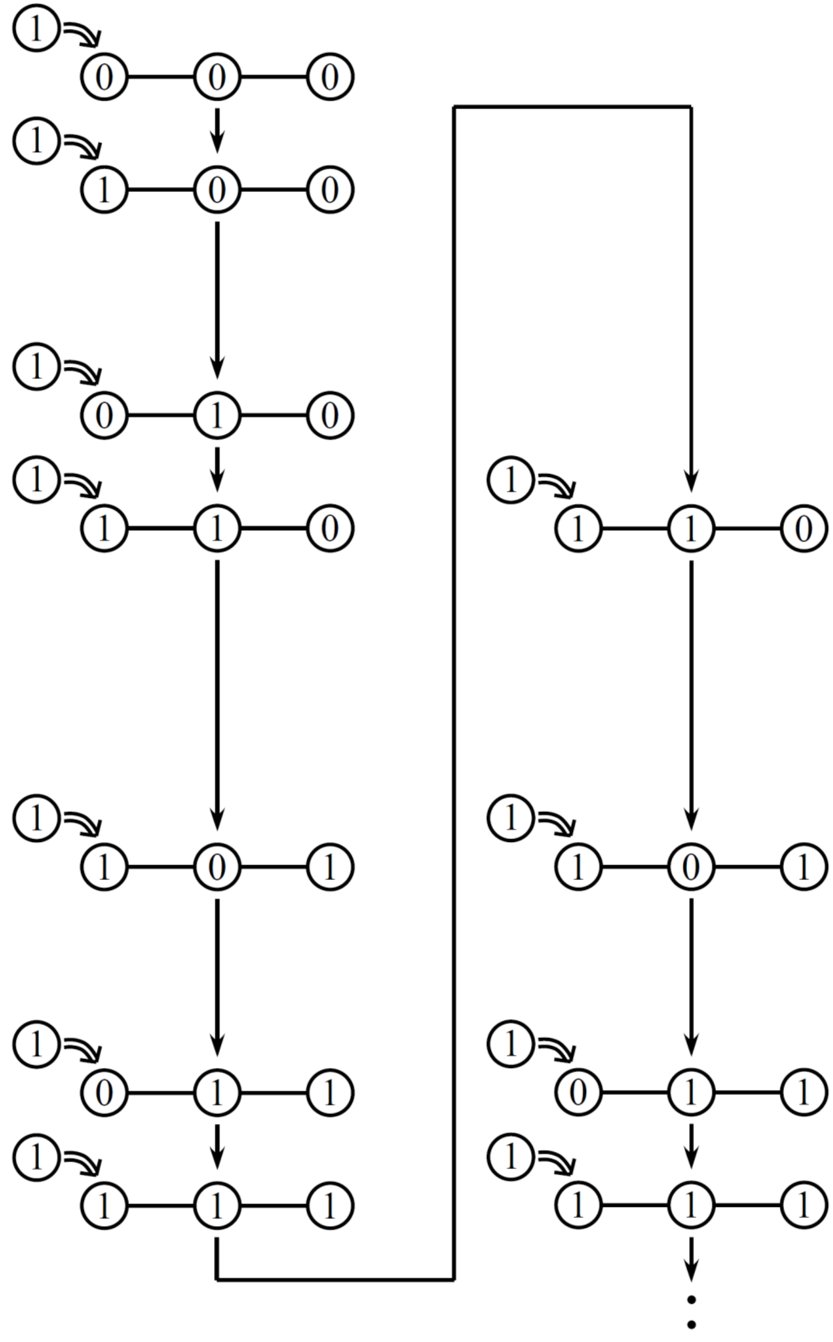
Dhar, D.: Phys. Rev. Lett. **64**, 1613-1616 (1990).

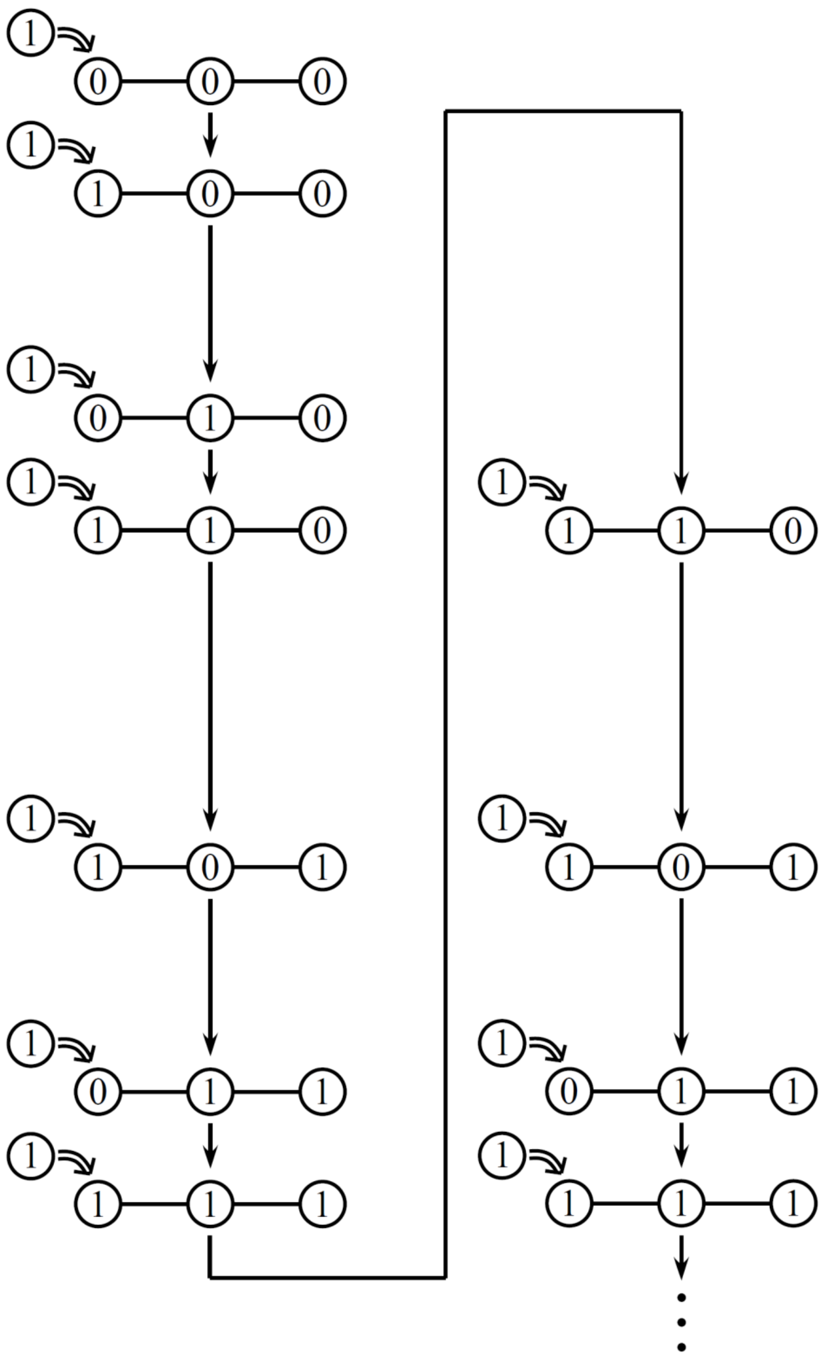
2.4 再帰的配置

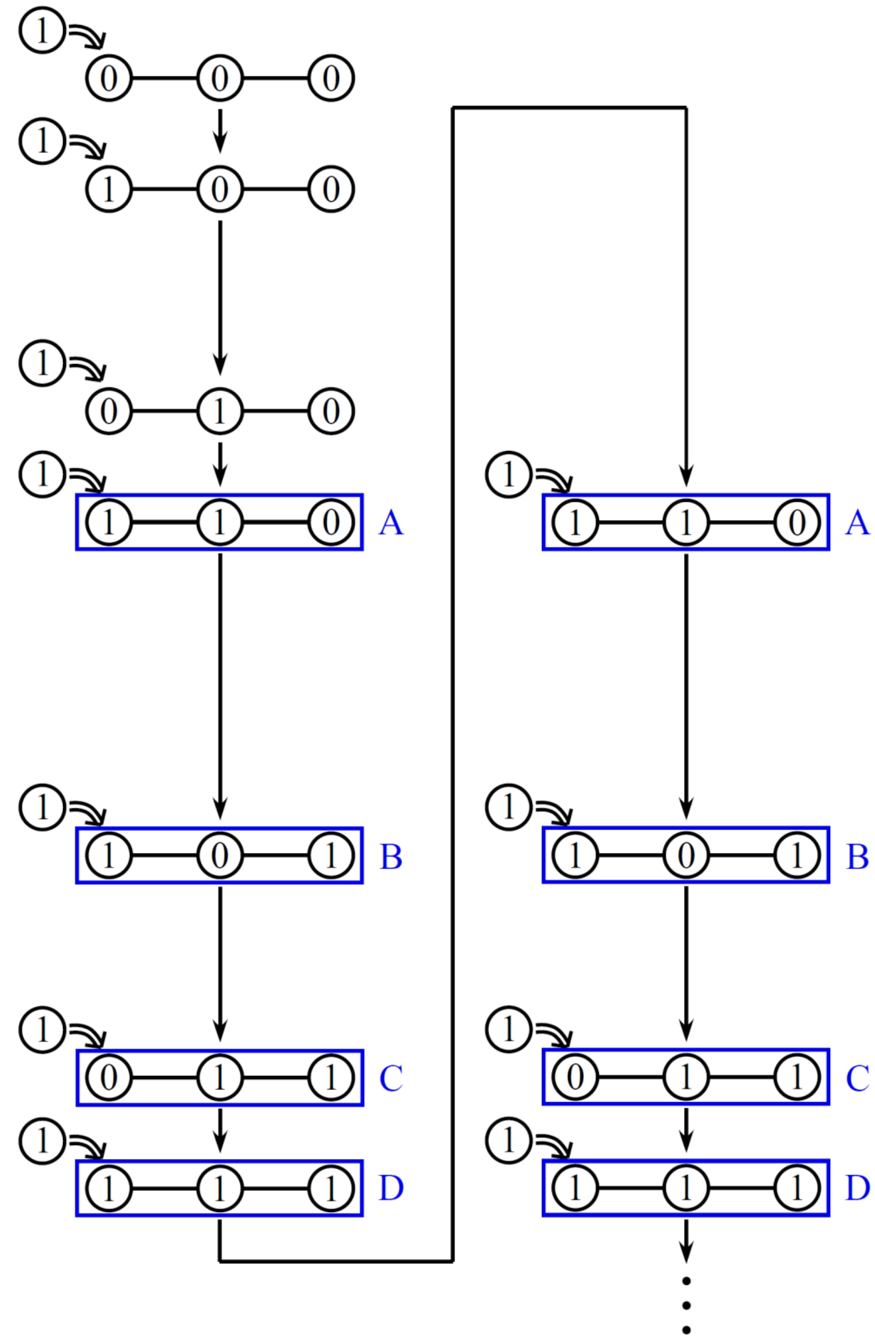
- 簡単化のため，$L = 3$ の 1 次元 BTW 模型を考えることにする．
- 空の配置から始める．
- 左端の格子点に摂動を加える．
  この摂動を何度も繰り返すことにより，プロセスを進める．

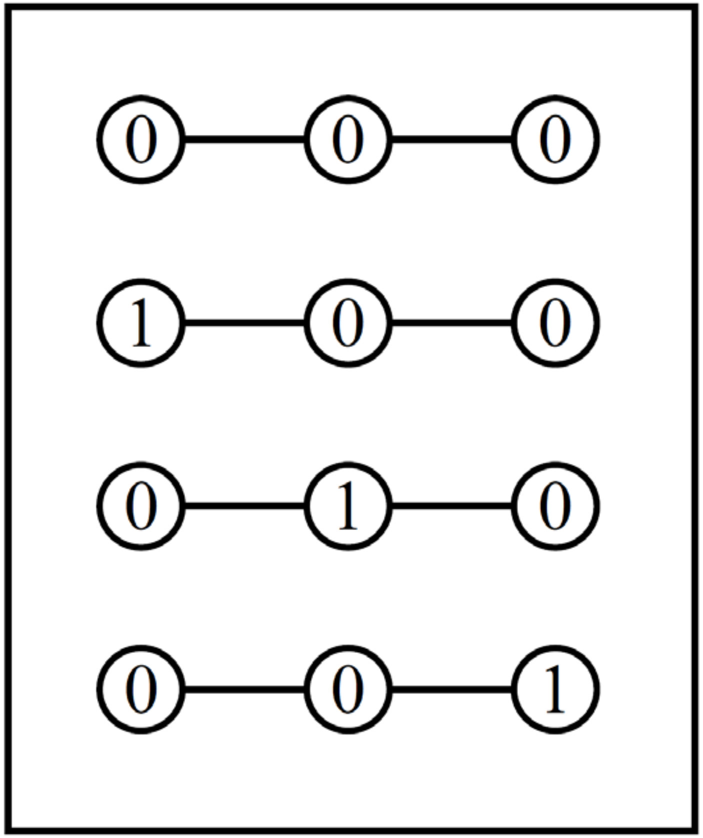


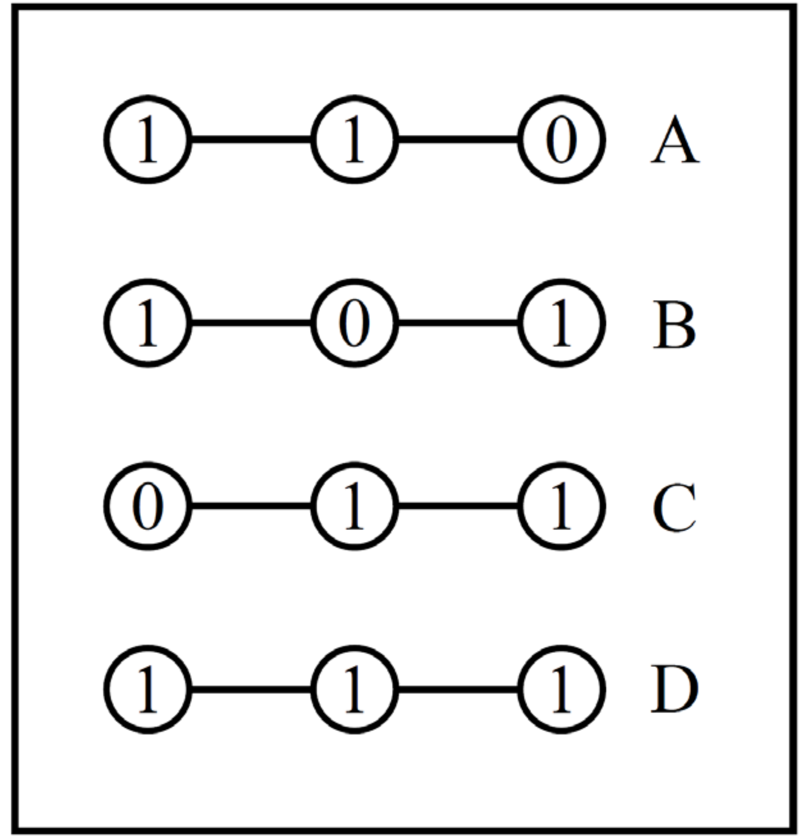







A
B
C
D





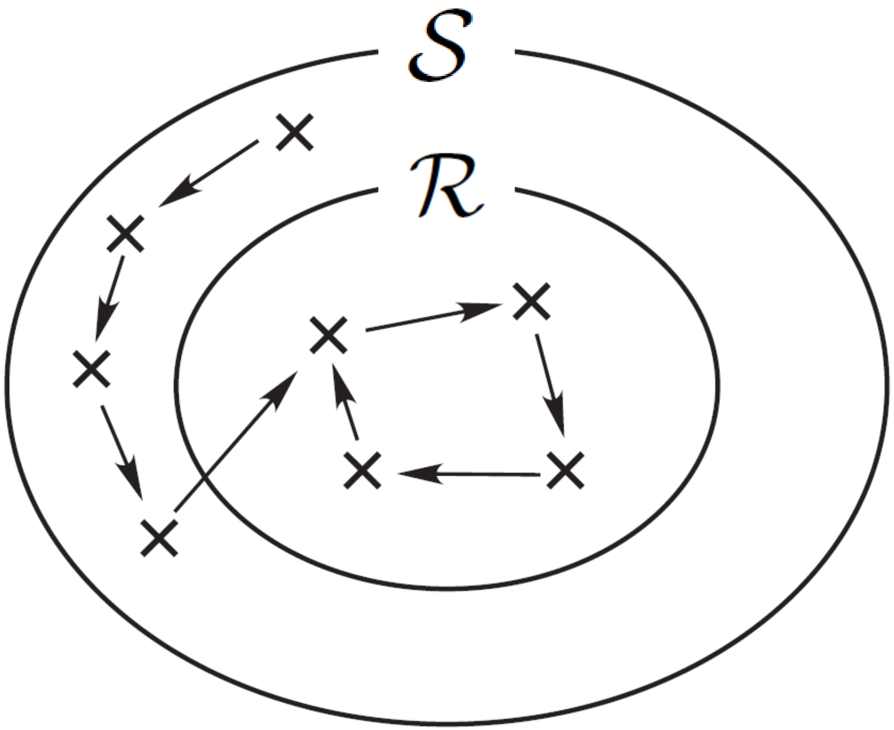
$2^3 = 8$ 個の安定配置のうち，
この 4 つは**過渡的配置**
(transient configurations)

この 4 つは**再帰的配置**
(recurrent configurations)

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \text{安定配置全体の集合} \\ \mathcal{R} = \text{再帰的配置全体の集合} \end{cases}$$

- $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$
- $\mathcal{R}$ は「なだれプロセス」で閉じている．

$$h \in \mathcal{R} \Rightarrow a(\mathbf{x})h \in \mathcal{R}, \forall \mathbf{x} \in \Lambda$$



2.5 マルコフ鎖としての ASM

- 摂動を Λ 上で一様ランダムに格子点を選んで与える.
- この摂動の与え方だけが**確率的 (stochastic)**, なだれのプロセスは**決定論的 (deterministic)**
- 全体として ASM は**マルコフ鎖 (Markov process)** になる.
- （BTW モデル，dissipative ASM を含む）多くの ASM が再帰配置空間 $\mathcal{R}$ において，irreducible である（エルゴード的である）ことが示せる.

（マルコフ鎖の一般論から）

$\boxed{\text{定常分布は唯一}}$

定常分布は唯一
定常分布は $\mathcal{R}$ 上の一様分布

ASM の定常状態

- 等重率則が成立（ミクルカノニカル分布）
- 大縮退した基底状態
- 多数の固定点（安定点）の集合

  Totally Nonfree Actions (A. M. Vershik)

3．可換砂山模型（ASM） と離散ポアソン方程式

- 砂山配置が $h \in \mathcal{R}$ のとき,

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{x},\mathbf{y},h) &= \text{格子点 } \mathbf{x} \text{ に 1 砂粒を加えたとき，それによって引き起こされる} \\
&\quad \text{なだれの最中に，格子点 } \mathbf{y} \text{ 上で toppling が起こる回数} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\tau(\mathbf{x},h)-1} \mathbf{1}(\mathbf{y} \in A^{\mathbf{x}}_{(\ell)}(h)), \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \Lambda.
\end{aligned}
$$

ただし，$\mathbf{1}(\omega)$ は，条件 ω が満たされたとき 1, それ以外は 0.

- ASM の定常分布を μ と書く．なだれ高さ $h \in \mathcal{R}$ をこの μ で平均する.

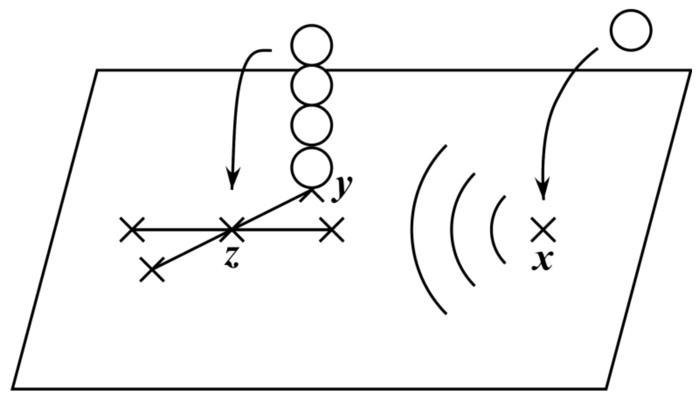
- この平均操作を $\langle \cdots \rangle$ で表すことにする.

- （定常分布における）**なだれ伝播関数**

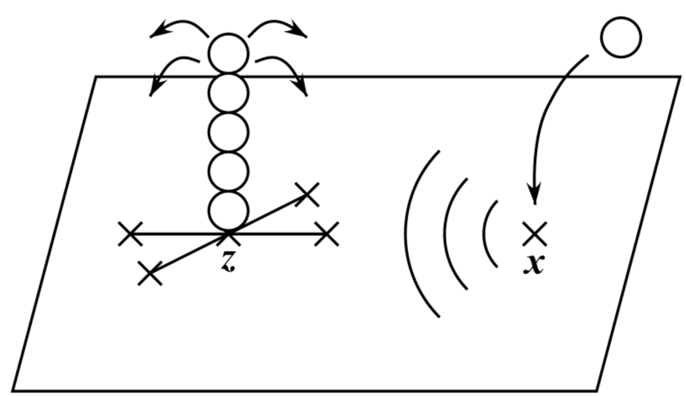
$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \langle T(\mathbf{x},\mathbf{y},h) \rangle \\
&= \text{格子点 } \mathbf{x} \text{ に 1 砂粒を加えたとき，それによって引き起こされる} \\
&\quad \text{なだれの最中に，格子点 } \mathbf{y} \text{ 上で toppling が起こる}\textbf{平均}\text{回数.}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{z} \in \Lambda$ に対して

$$
\begin{aligned}
J_{\mathrm{in}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) &= \text{格子点 } \mathbf{x} \text{ に 1 砂粒を加えたとき，それによって引き起こされる} \\
&\quad\ \text{なだれによって，格子点 } \mathbf{z} \text{ に流入する砂粒の平均数} \\
&= \delta_{\mathbf{x}\,\mathbf{z}} + \sum_{\mathbf{y}:\mathbf{y}\neq\mathbf{z}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})|\Delta(\mathbf{y},\mathbf{z})| = \delta_{\mathbf{x}\,\mathbf{z}} - \sum_{\mathbf{y}:\mathbf{y}\neq\mathbf{z}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta(\mathbf{y},\mathbf{z})
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
J_{\mathrm{out}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) &= \text{格子点 } \mathbf{x} \text{ に 1 砂粒を加えたとき，それによって引き起こされる} \\
&\quad\ \text{なだれによって，格子点 } \mathbf{z} \text{ から流出する砂粒の平均数} \\
&= G(\mathbf{x},\mathbf{z})\Delta(\mathbf{z},\mathbf{z})
\end{aligned}
$$



- 定常状態では，すべての格子点 $\mathbf{z}$ でこの 2 つが釣り合っている：

$$J^{\mathbf{x}}_{\mathrm{in}}(\mathbf{z}) = J^{\mathbf{x}}_{\mathrm{out}}(\mathbf{z}) \iff \delta_{\mathbf{x}\,\mathbf{z}} - \sum_{\mathbf{y}:\mathbf{y}\neq\mathbf{z}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta(\mathbf{y},\mathbf{z}) = G(\mathbf{x},\mathbf{z})\Delta(\mathbf{z},\mathbf{z})$$

$$\iff \boxed{\sum_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{z}}, \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{z} \in \Lambda.}$$

- ポアソン方程式のグリーン関数の式 $\Delta g(\mathbf{z}) = \delta(\mathbf{z}-\mathbf{x})$ の離散化と見なせる.

- **massless** filed $\iff$ ASM **(Self-Organized Criticality)**

- 行列表示

$$\begin{cases} \Delta = (\Delta(\mathbf{x},\mathbf{y}))_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda}, \\ G = (G(\mathbf{x},\mathbf{y}))_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda}, \\ I = (\delta_{\mathbf{x}\,\mathbf{y}})_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda} \end{cases} \implies G\Delta = I \implies \boxed{G = \Delta^{-1}}$$

つまり，$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [\Delta^{-1}](\mathbf{x},\mathbf{y}), \mathbf{x},\mathbf{y} \in \Lambda$. (ルール行列 Δ の逆行列)

- BTW 模型（サイズ L の立方格子 B_L の上）
  $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ を固定して $[\Delta^{-1}](\mathbf{x},\mathbf{y})$ を求めてから，$L\to\infty$ の極限をとる．

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x},\mathbf{y})-G(\mathbf{x},\mathbf{x}) &\simeq -\frac{1}{2\pi}\log|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \quad d=2, \\ G(\mathbf{x},\mathbf{y}) &\simeq \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{d-2}}, \quad d\geq 3. \end{aligned}$$

- 定常状態でのなだれの平均規模（toppling が平均何回起こるか）

$$\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda}\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda}\langle T(\mathbf{x},\mathbf{y},h)\rangle = \frac{1}{L^d}\sum_{\mathbf{x}\in\Lambda}\quad\sum_{\mathbf{y}\in\Lambda}G(\mathbf{x},\mathbf{y})\sim L^2\to\infty, \quad d\geq 3.$$

（BTW モデルで $L\to\infty$ において）

- ASM （なだれ現象一般？）
  べき乗則 $\Longrightarrow$ SOC (Self-Organized Criticality)
  拡散的 $\Longleftrightarrow$ ランダムウォーク（ブラウン運動）的：
  （フラクタル次元）2 次元的な広がり