自己組織化臨界現象と可換砂山模型

香取眞理
（中央大学理工学部物理学科）
Katori, Makoto (Chuo University)

［スライド part 4/5］

青山学院大学 物理・数理学科　コロキウム
2015年度 第7回

2015年10月22日
青山学院大学　理工学部　L棟6階　L603室

目次:

4. 再帰的配置と全域木（spanning tree）との１対１対応

4.1 超格子上での ASM プロセスと行列式

- 格子点 $\mathbf{x} \in \Lambda \Longleftrightarrow$ 単位ベクトル $\mathbf{e}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x}\,\mathbf{y}}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda \Longrightarrow |\Lambda| \text{ 次元ベクトル空間 } \mathcal{V} \text{ を定義}$$

- 高さ配置は $\mathcal{V}$ 内のベクトルで表せる：

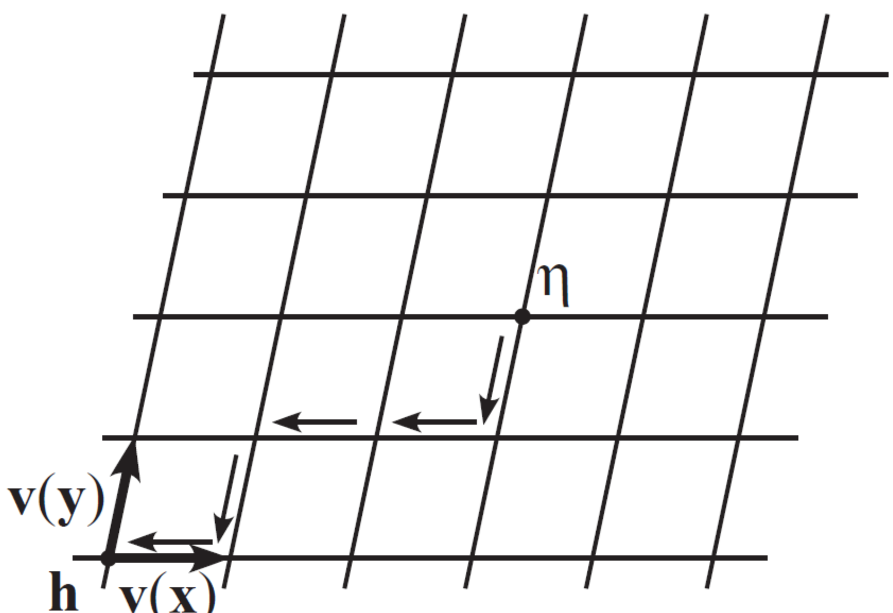
$$\begin{aligned}
& \text{砂山高さ配置 } \eta = (\eta(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Lambda} \in \mathbb{N}_0^{|\Lambda|} \\
\Longleftrightarrow \quad & \text{ベクトル } \boldsymbol{\eta} = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \eta(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V} \\
\Longleftrightarrow \quad & (\mathbf{e}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Lambda} \text{ を各辺とする } |\Lambda| \text{ 次元立方体} \\
& \text{を単位胞とする超格子 } \Omega_0 \text{ 上の 1 つの格子点 } (\Omega_0 \subset \mathcal{V}).
\end{aligned}$$

- ルール行列 Δ を用いて，次のベクトルの集合を定義する：

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}:\mathbf{y}\in\Lambda} \Delta(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{e}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}\in\Lambda.$$

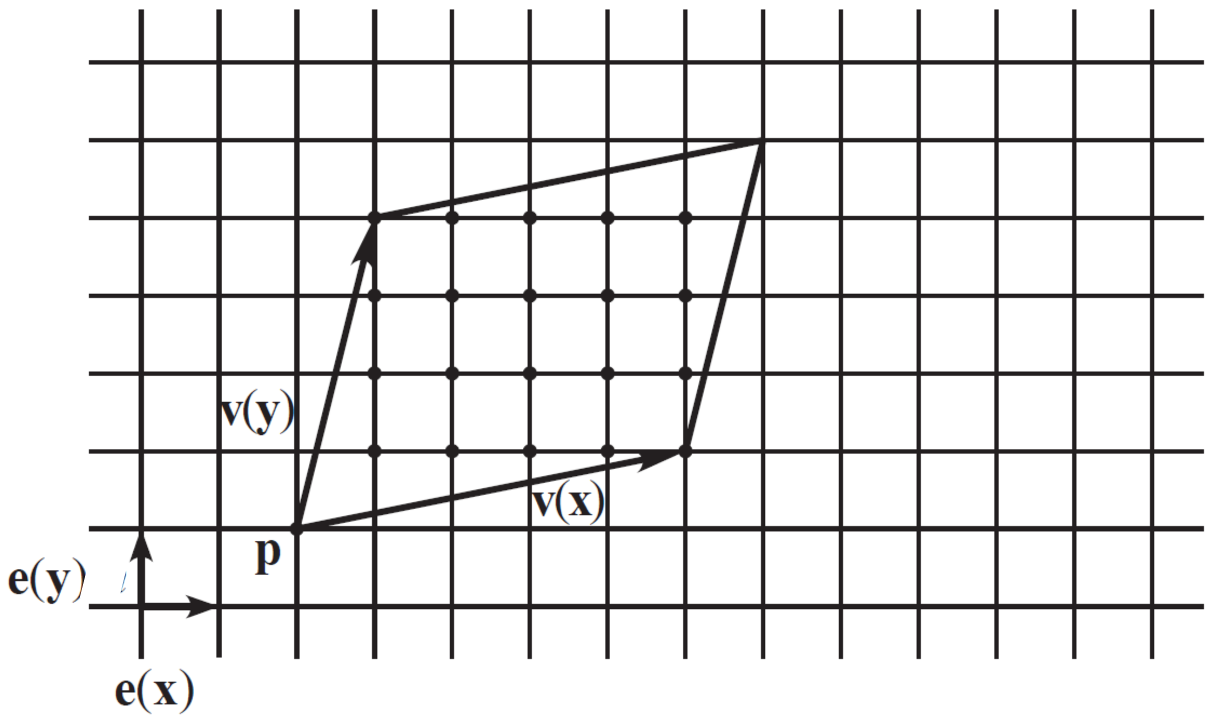
- $(\mathbf{v}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in\Lambda}$ は単位ベクトル $(\mathbf{e}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in\Lambda}$ の合成ベクトル.
  $(\mathbf{v}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in\Lambda}$ の張る格子を Ω とする（これは原点 $\mathbf{0}$ を含む）.
  与えられた $\boldsymbol{\eta}\in\Omega_0$（細かい方) に対して，$\Omega_{\eta} = \Omega + \boldsymbol{\eta}$ とする
  (Ω を $\boldsymbol{\eta}$ だけシフト $\iff$ Ω_{η} は $\boldsymbol{\eta}$ を格子点として含む)

- 不安定配置 $\boldsymbol{\eta}\mapsto$ 再帰的配置 $\mathbf{h}$ の遷移（なだれ：avalanche）は，
  ベクトル空間 $\mathcal{V}$ では（粗い方の）格子 Ω_{η} 上のウォークで表される.



- つまり，Ω_η の 1 格子点のみが $\mathcal{R}$ 配置
- 再帰的配置空間 $\mathcal{R} \Longleftrightarrow \Omega$ の単位胞（基本領域）
- 再帰的配置の総数

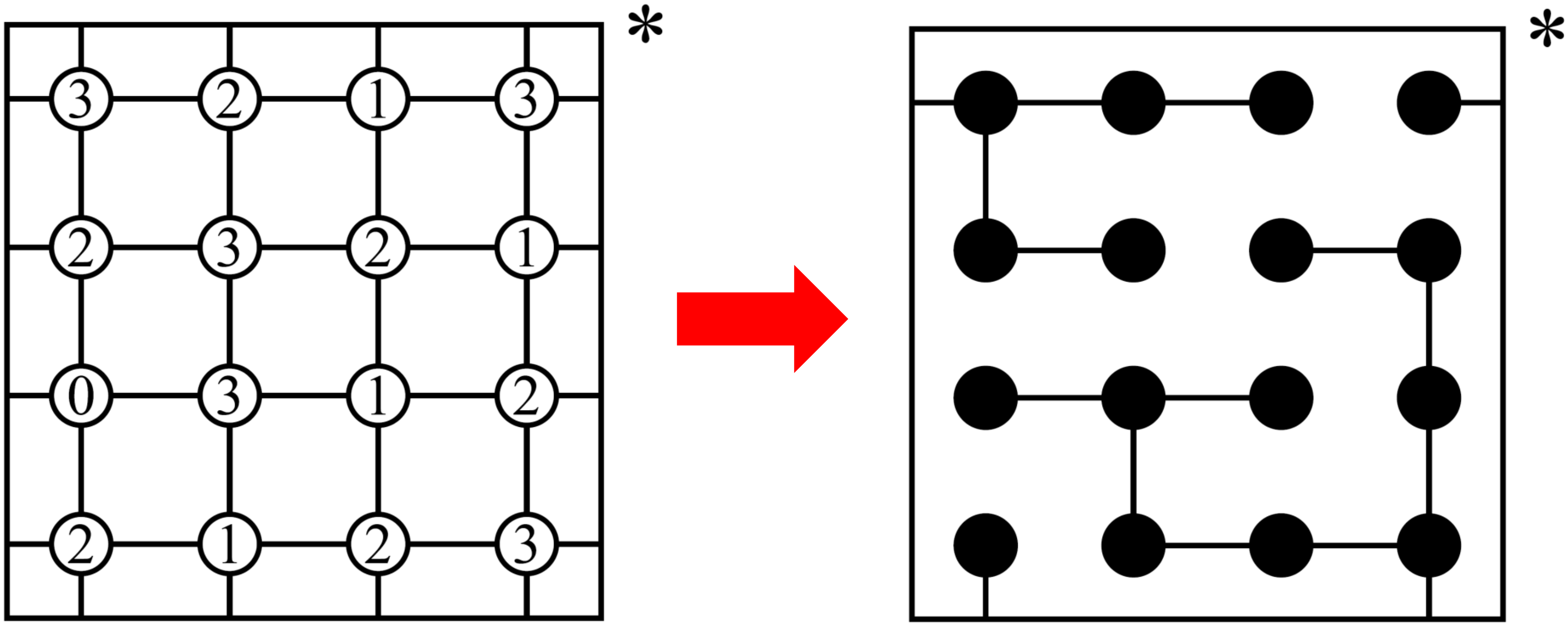
$$|\mathcal{R}| = \Omega \text{ の基本領域の体積} = \boxed{\det_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda} \Delta(\mathbf{x},\mathbf{y}).}$$



4.2 森林火災アルゴリズム(burning algorithm)

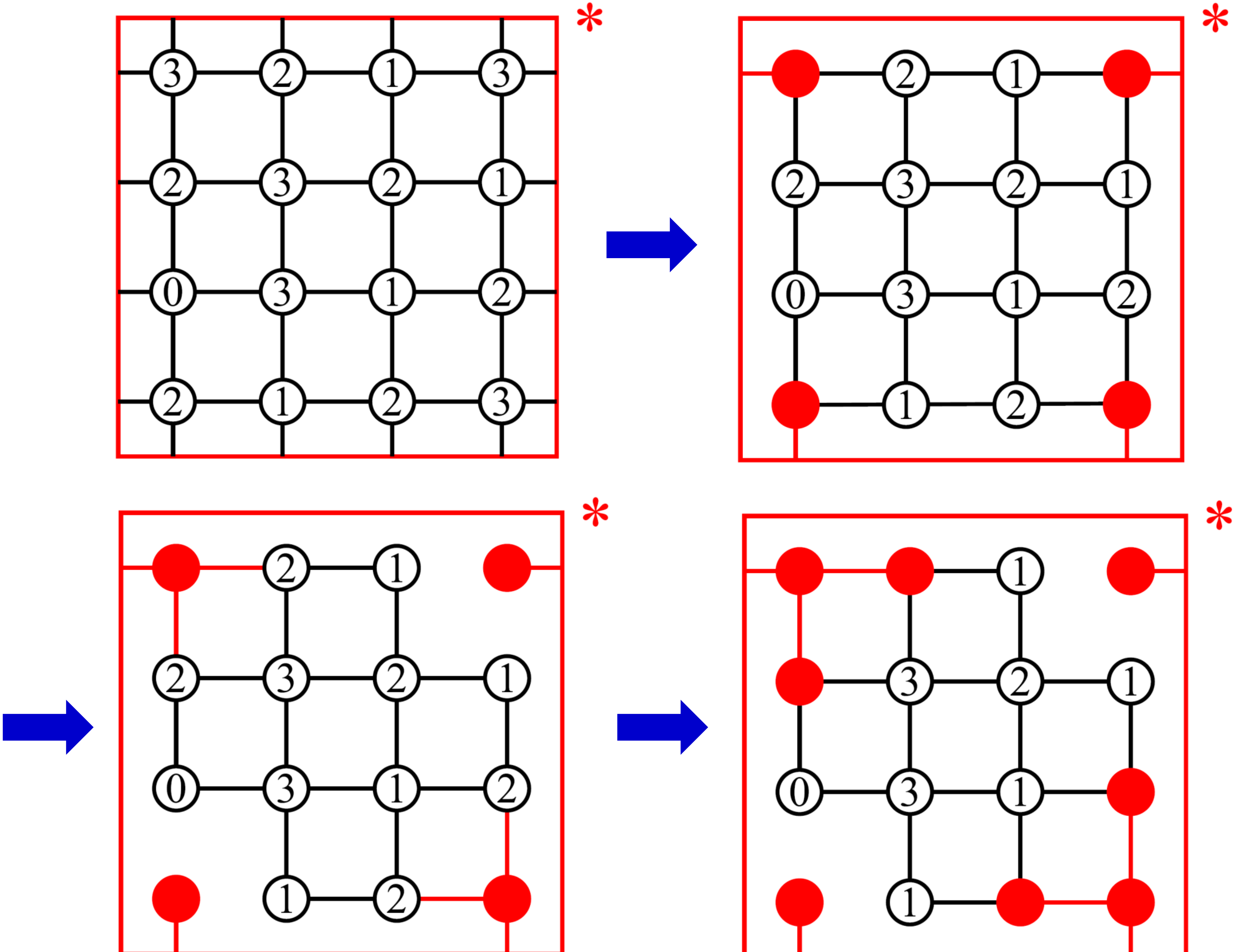
- $\det_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\Lambda} \Delta(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は Section 1 で説明したグラフ $G=(V,E), V=\Lambda\cup\{\mathbf{r}\}$ の上の $\mathbf{r}$ を根（root）とする**全域木 (spanning tree)** の総数に等しい（**Kirchhoff の定理**).
- 上述の全域木全体の集合を $\mathcal{T}$ と書くことにすると，$|\mathcal{R}|=|\mathcal{T}|$.
- Majumdar と Dhar は $\mathcal{R}$ と $\mathcal{T}$ は 1 対 1 対応していることを証明した.
  Majumdar, S. N., Dhar, D.: Physica A **185**, 129-145 (1992).
- 砂山高さ配置 $h\in\mathcal{R}$ から全域木 $\in\mathcal{T}$ を一意的に対応させるアルゴリズムを与えることによって，具体的な証明がなされた.
- このアルゴリズムを **burning algorithm** （森林火災アルゴリズム）という.

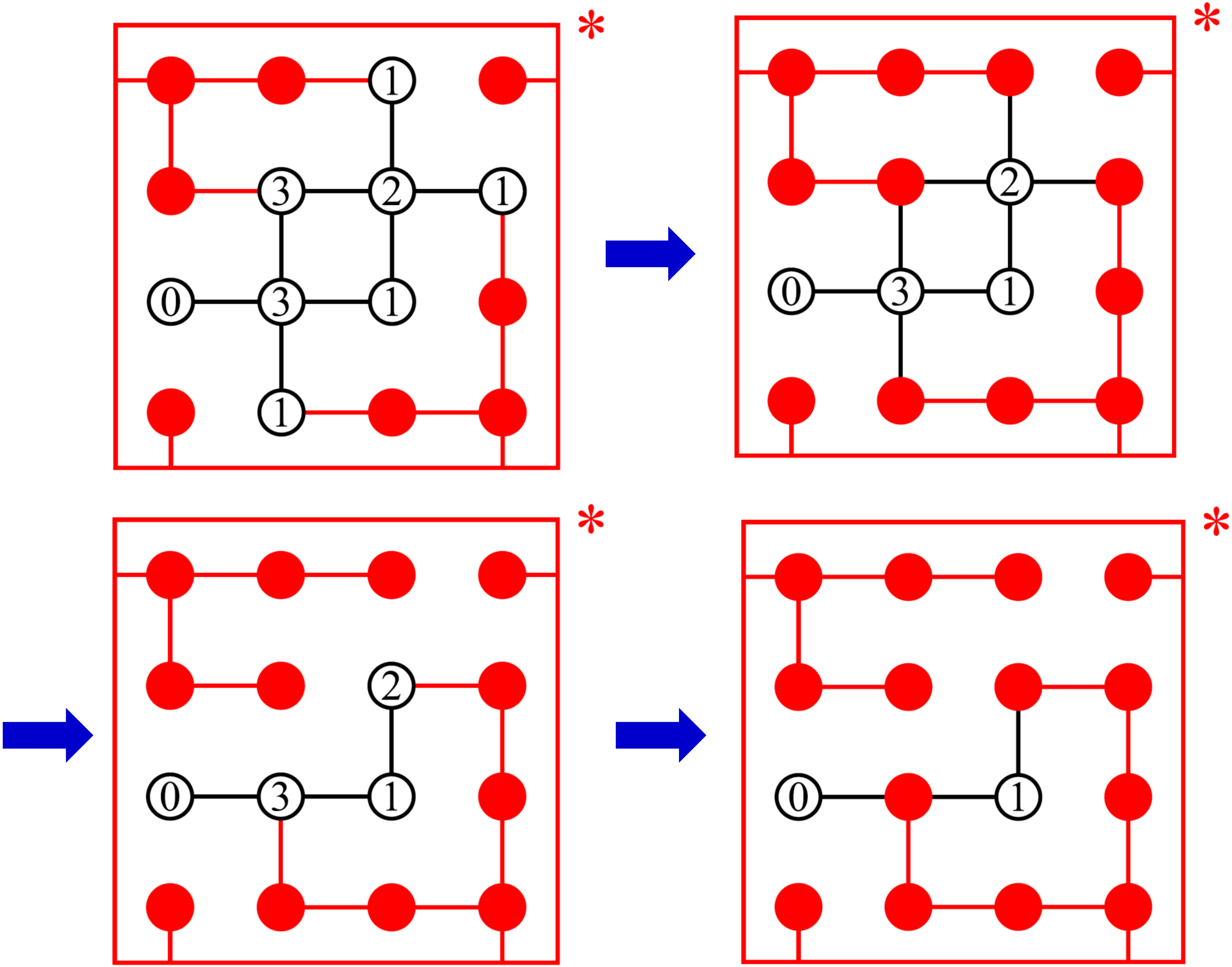
森林火災アルゴリズム（burning algorithm）の例示

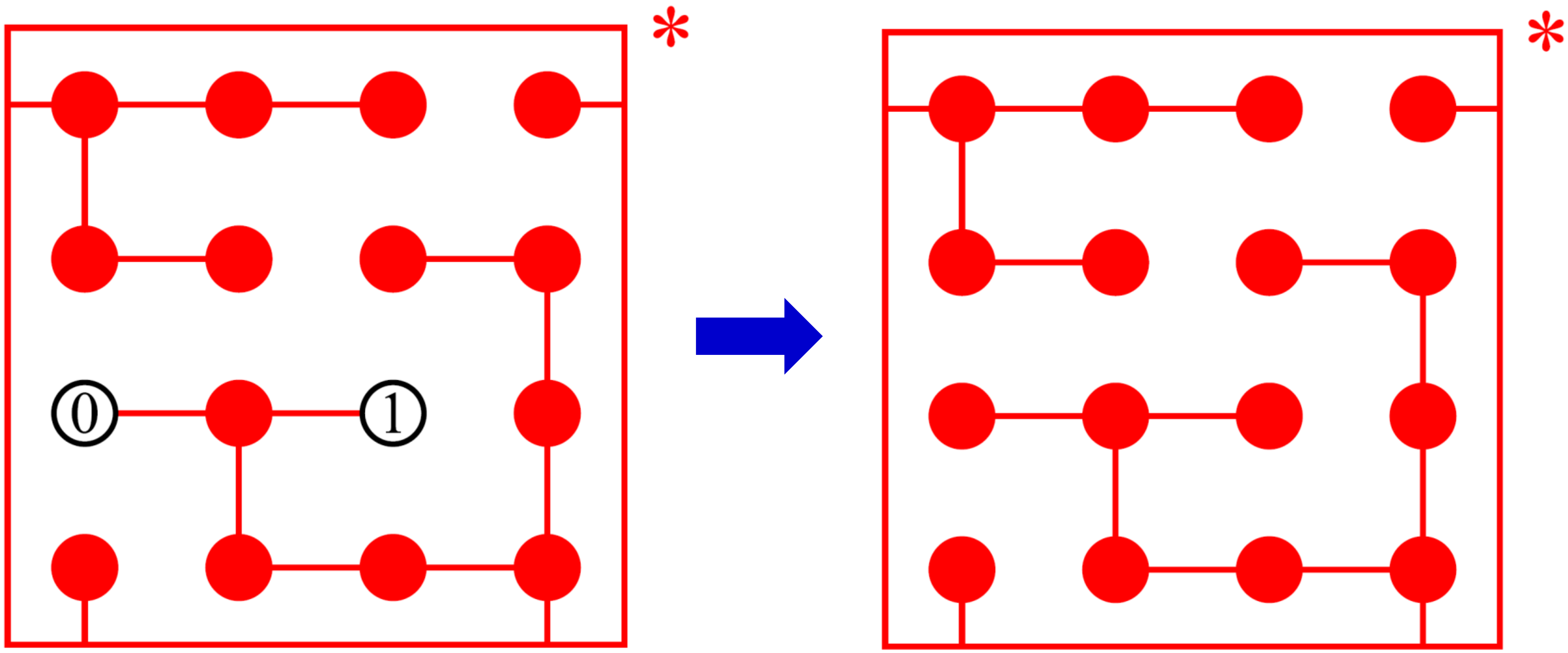


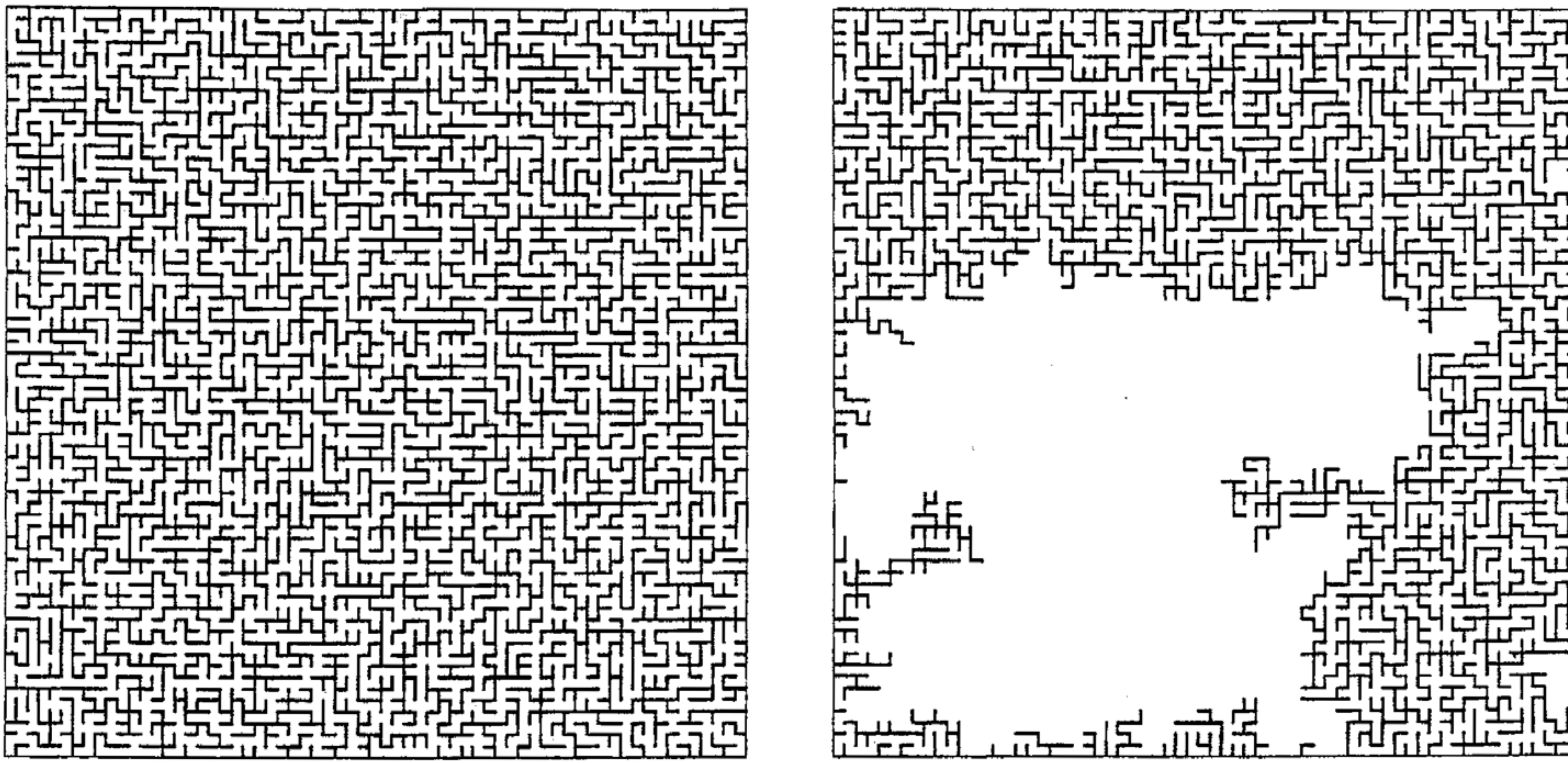
$\in \mathcal{R}$ $\in \mathcal{T}$

全域木（spanning tree）の例：
全てのサイトが root（＊）とボンドで結ばれているが，ループはない（tree グラフ）

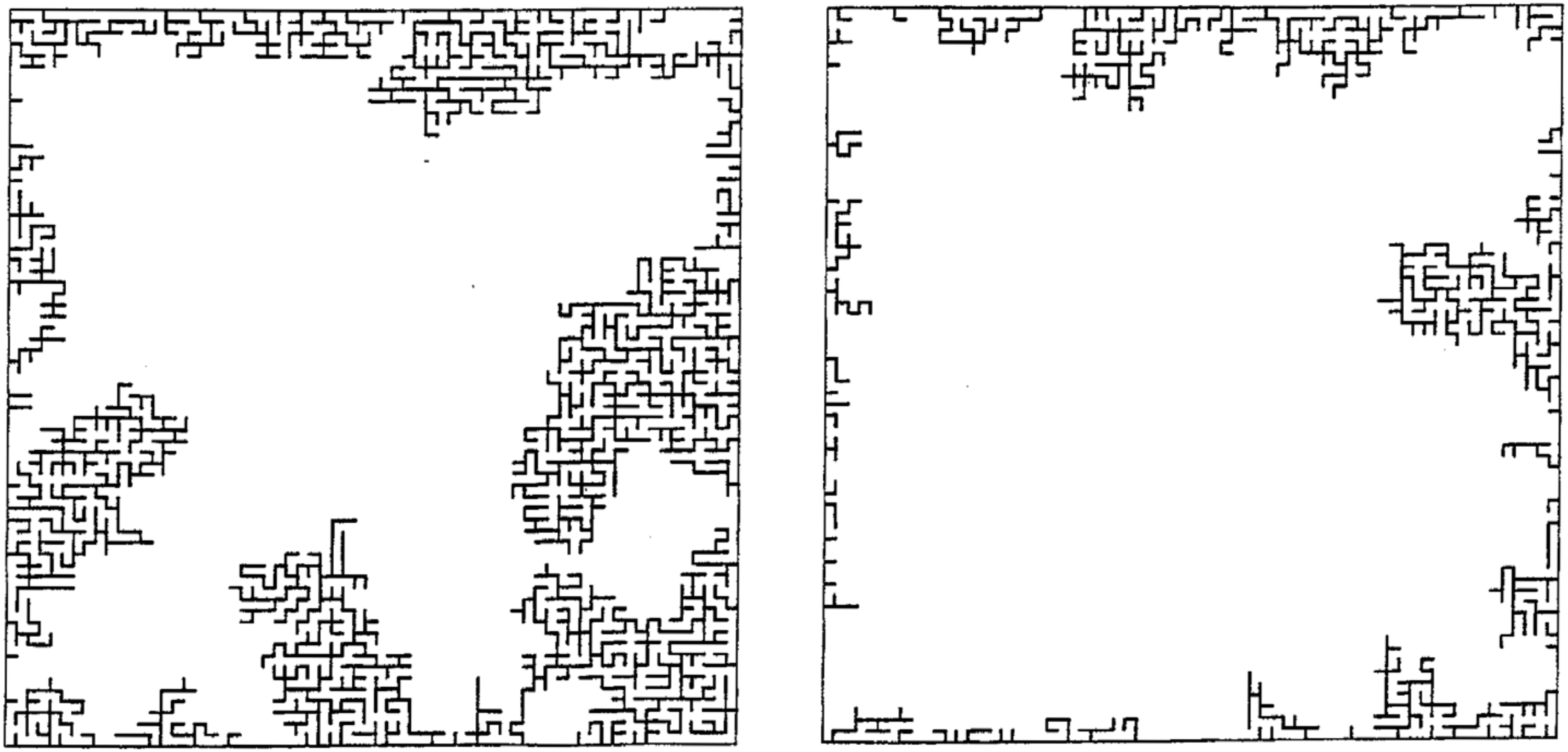

*
3 2 1 3
2 3 2 1
0 3 1 2
2 1 2 3
*
2 1
2 3 2 1
0 3 1 2
1 2
*
2 1
2 3 2 1
0 3 1 2
1 2
*
1
3 2 1
0 3 1
1


*
1
3 2 1
0 3 1
1
*
2
0 3 1
*
2
0 3 1
*
0 1


*
0
1
*



These figures were given by S. S. Manna.



These figures were given by S. S. Manna.

ASM の定常状態

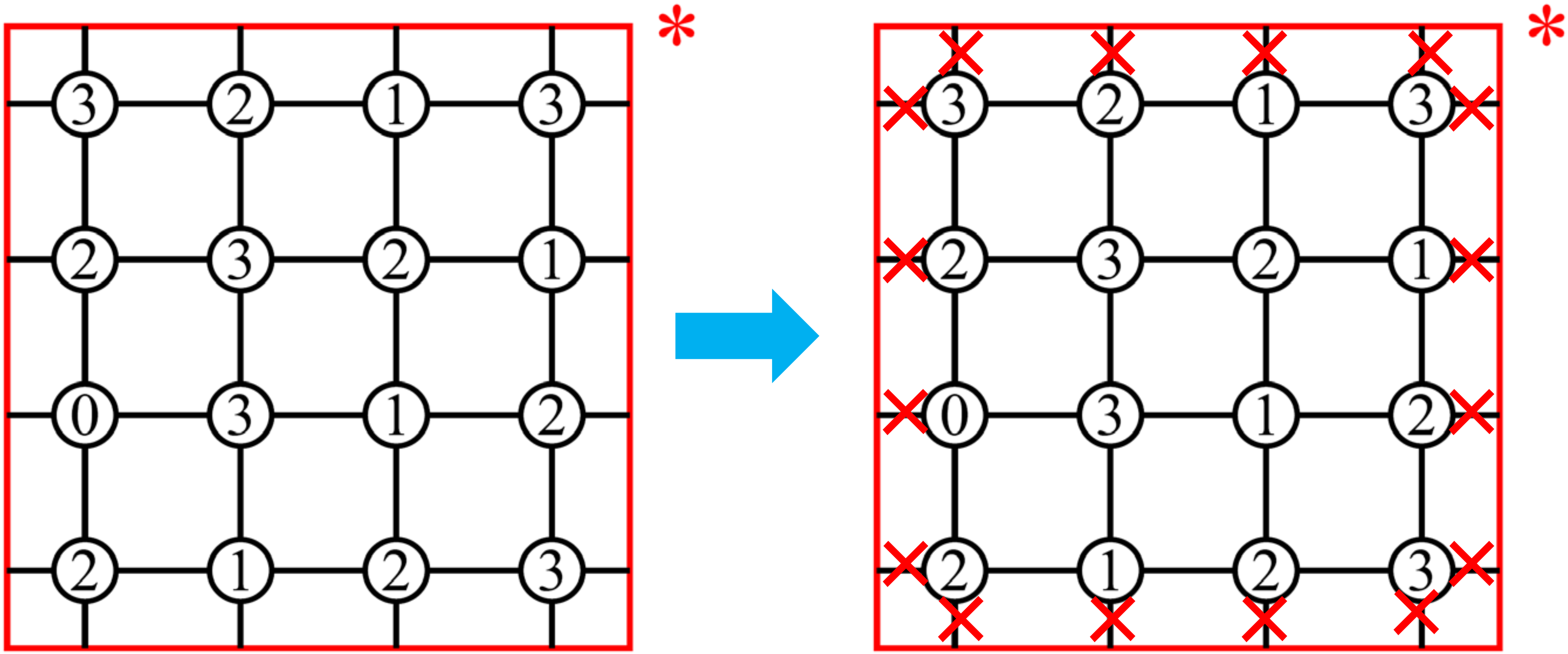
$\Updownarrow$

全域木（spanning tree）のミクロカノニカル分布

妄想

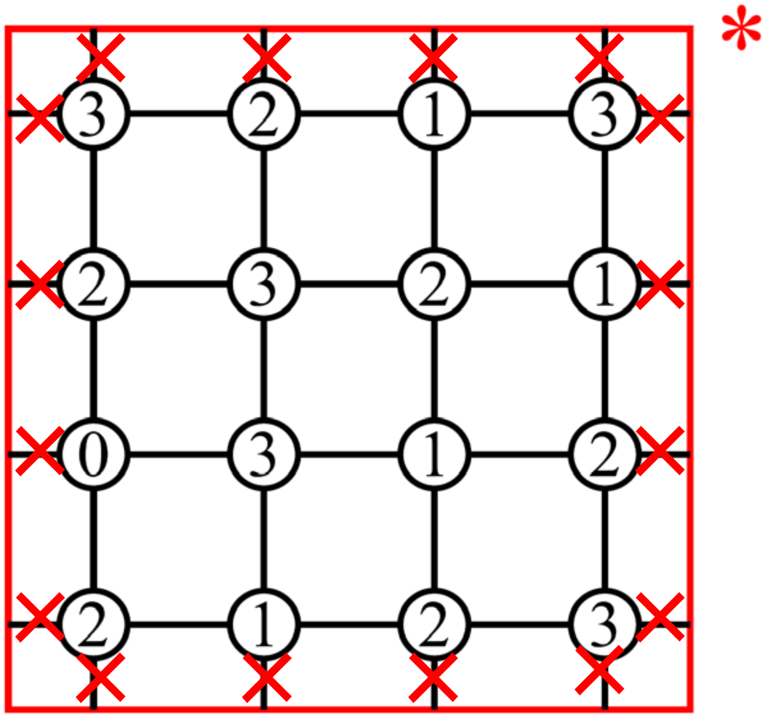
- 全域木のカノニカル分布やグランドカノニカル分布は?
  $\Longrightarrow$ 再帰的配置は（大縮退した）基底状態のようなもの.
  この（エネルギーゼロの）等エネルギー面しかない？
- ASM の過渡的配置 $h \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{R}$, あるいは不安定配置 $\eta \in \mathbb{N}_0^{|\Lambda|} \setminus \mathcal{S}$ の幾何構造は？
  $\Longrightarrow$ 非平衡統計力学の定式化のよい例？

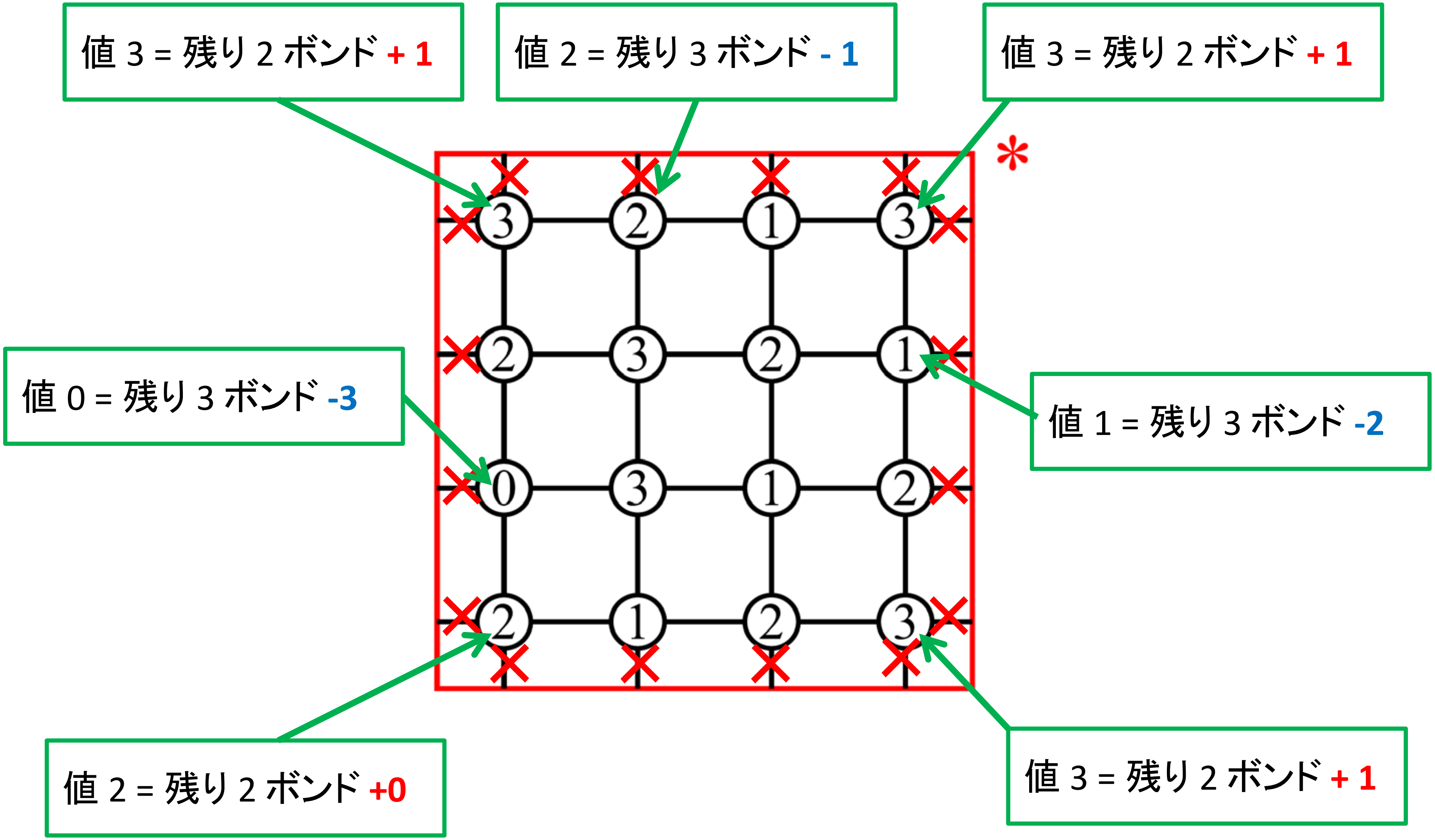
Burning Algorithm の説明

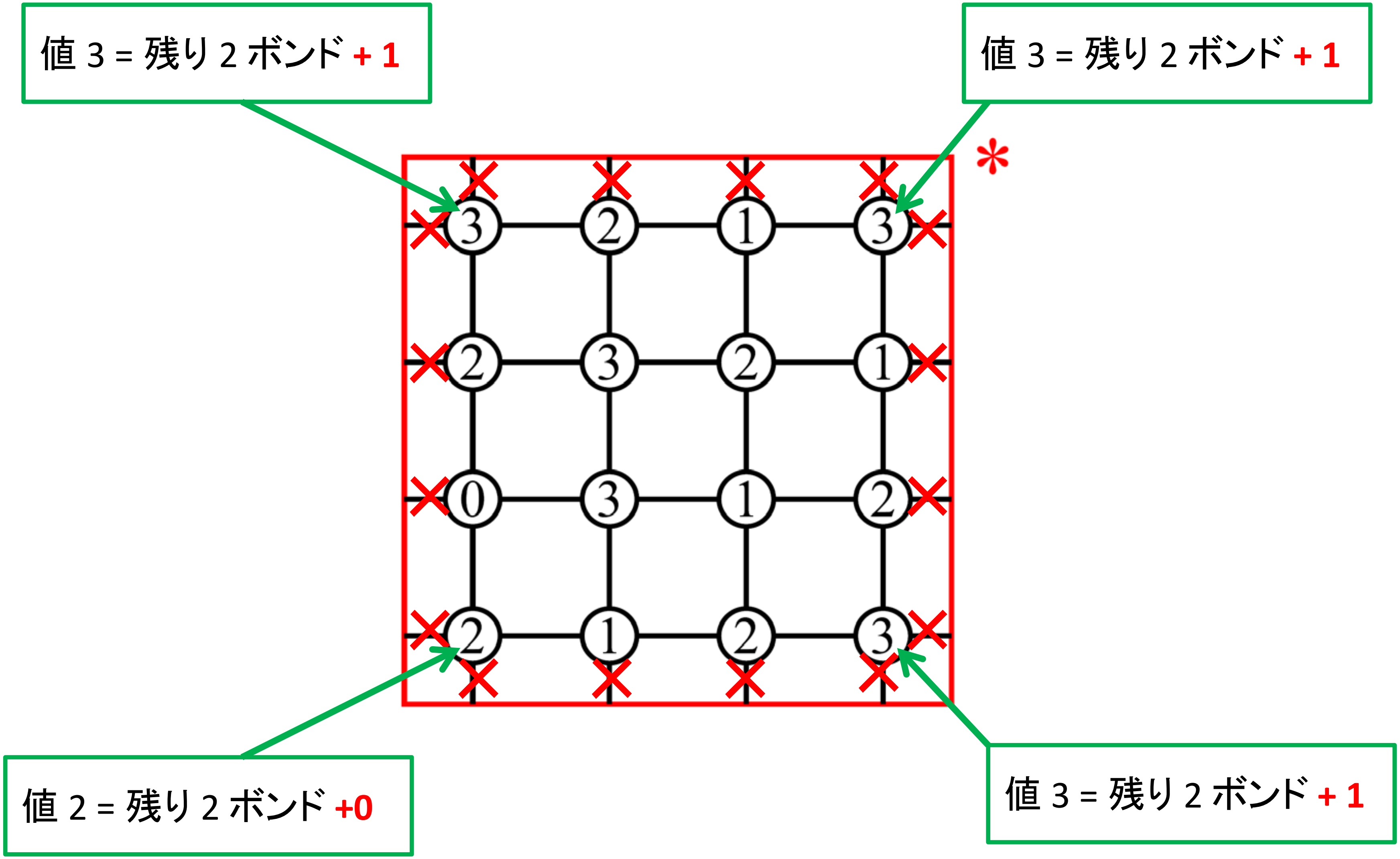


root（＊）が発火

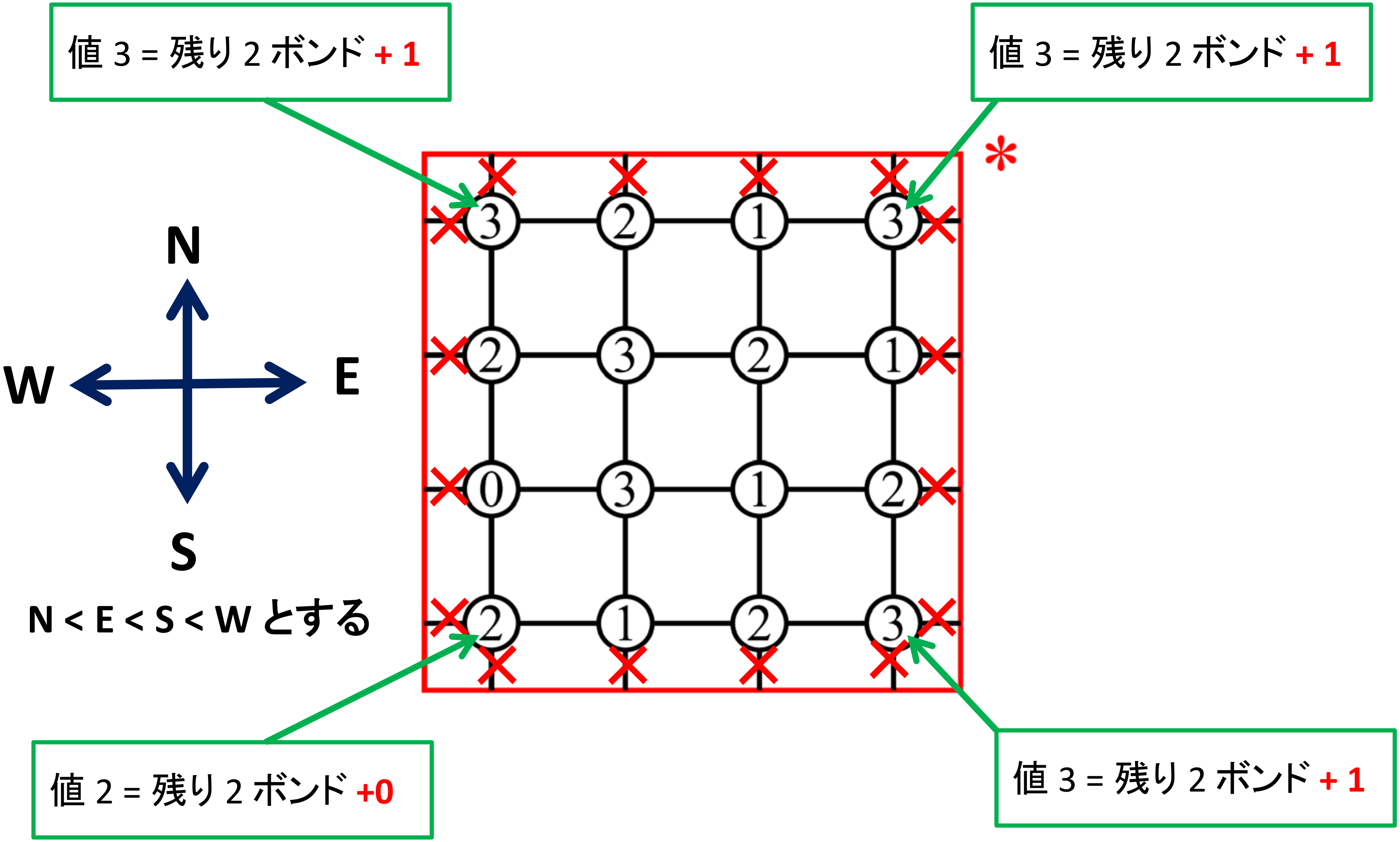
発火した root とつながっているボンドを一旦すべて切る.


3
2
1
3
2
3
2
1
0
3
1
2
2
1
2
3
*

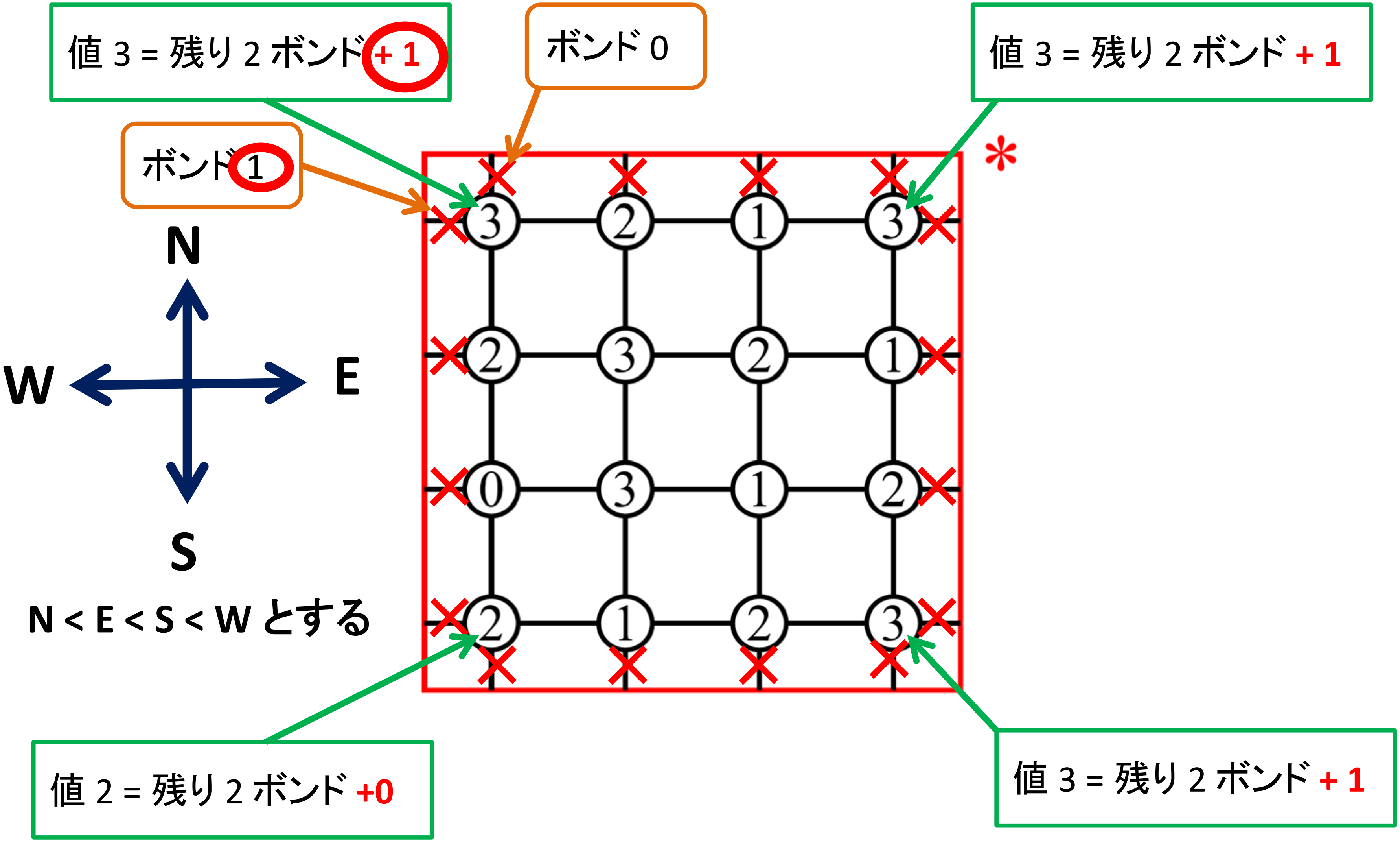

値 3 = 残り 2 ボンド + 1
値 2 = 残り 3 ボンド - 1
値 3 = 残り 2 ボンド + 1
値 0 = 残り 3 ボンド -3
値 1 = 残り 3 ボンド -2
値 2 = 残り 2 ボンド +0
値 3 = 残り 2 ボンド + 1
*



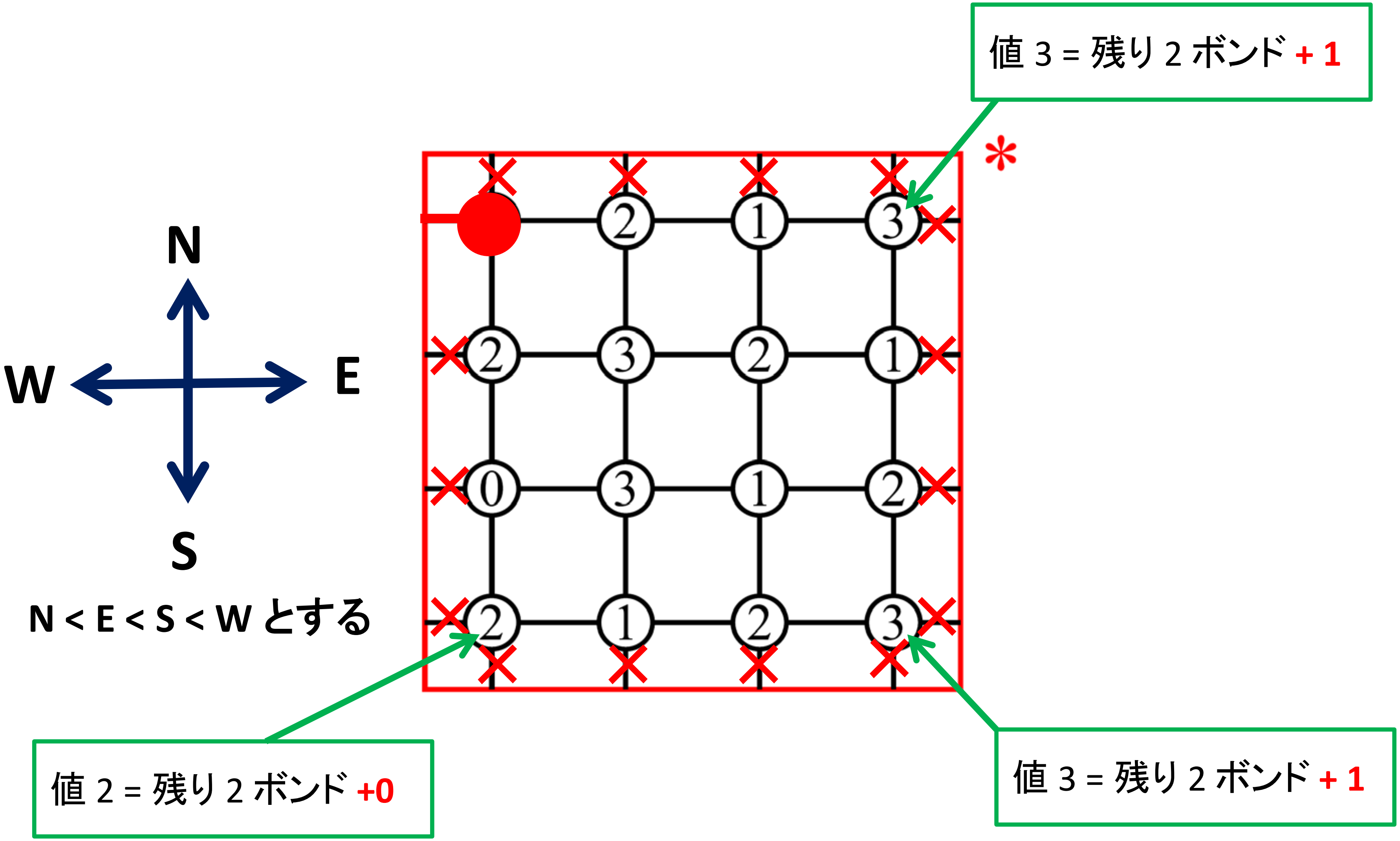
サイトの値　ー 残りのボンドの数　≧　0　のサイトにだけ延焼

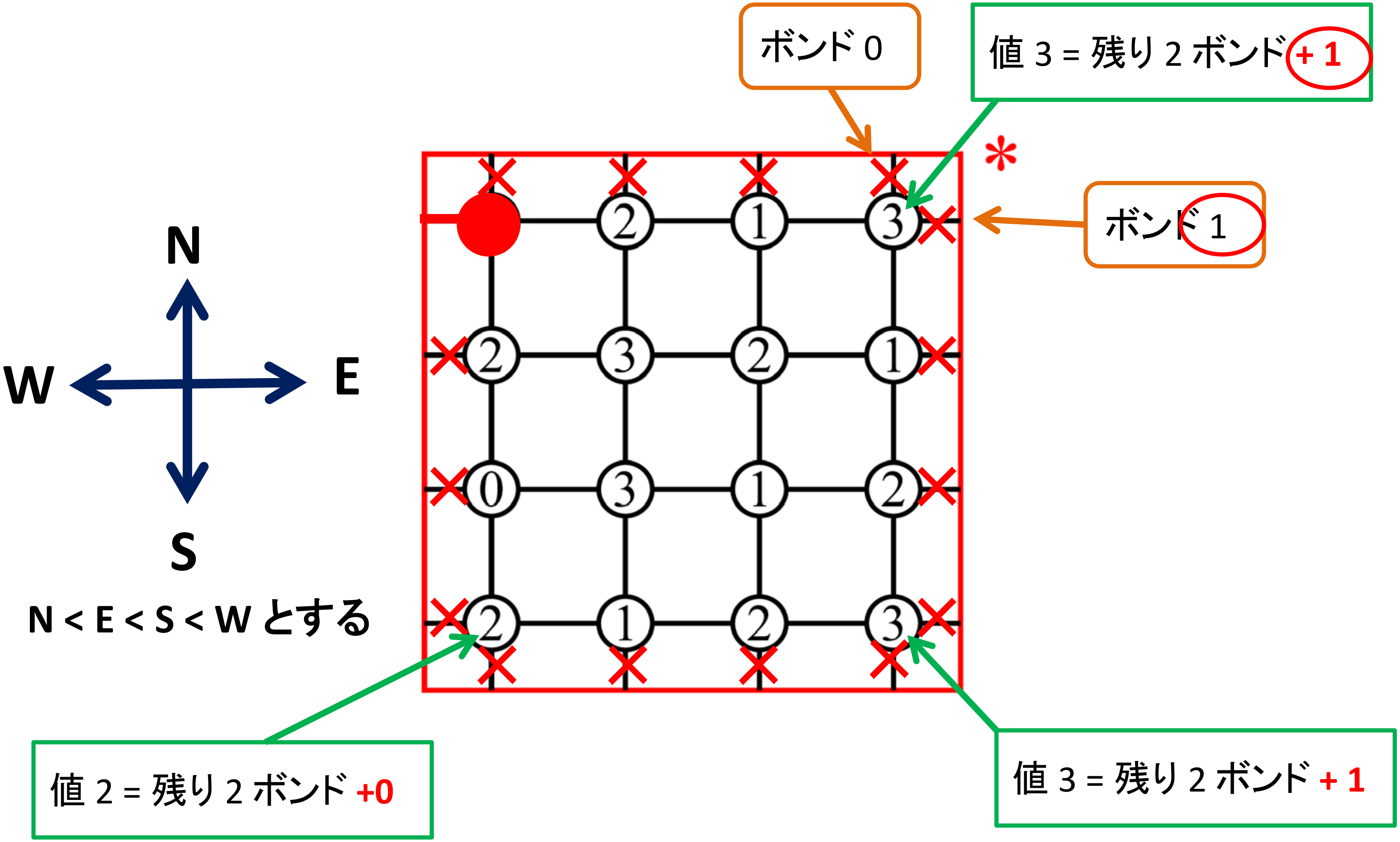


「どのボンドを通って火が伝わるか」を定めていくためのアルゴリズム:
一旦切ったボンドのうち，延焼するサイトに至るボンドを1本ずつ選ぶ

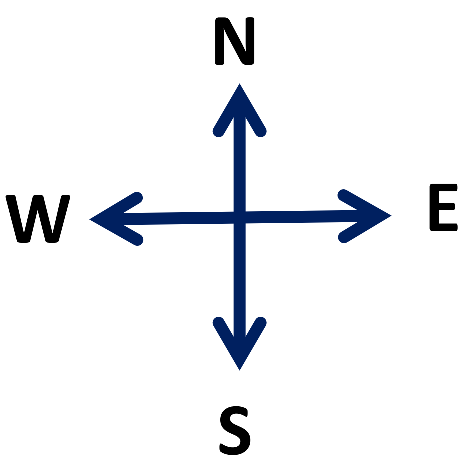


値 3 = 残り 2 ボンド + 1
ボンド 0
値 3 = 残り 2 ボンド + 1
ボンド 1
*
N
W
E
S
N < E < S < W とする
3 2 1 3
2 3 2 1
0 3 1 2
2 1 2 3
値 2 = 残り 2 ボンド +0
値 3 = 残り 2 ボンド + 1

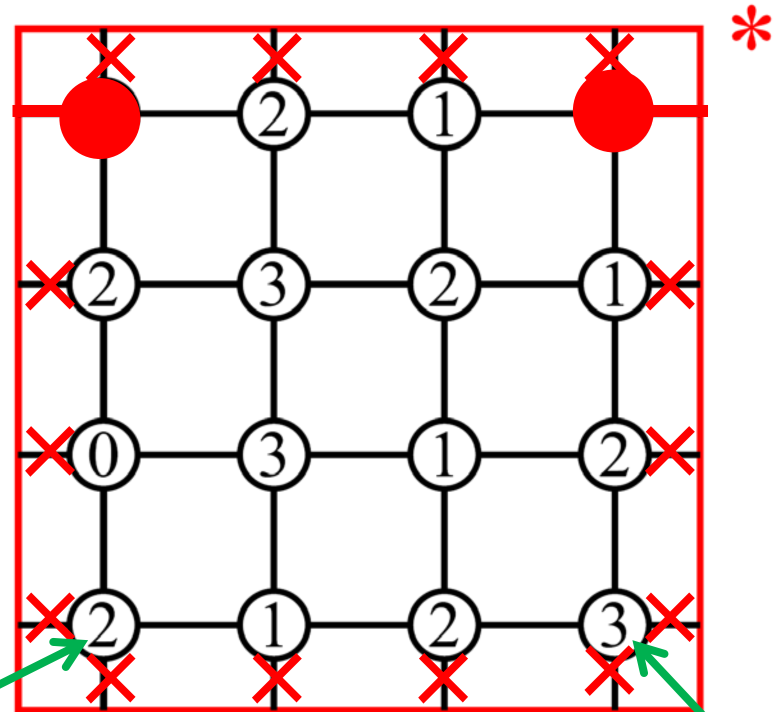

N
W
E
S
N < E < S < W とする
値 3 = 残り 2 ボンド + 1
*
値 2 = 残り 2 ボンド +0
値 3 = 残り 2 ボンド + 1



ボンド 0
値 3 = 残り 2 ボンド + 1
ボンド 1
N
W
E
S
N < E < S < W とする
値 2 = 残り 2 ボンド +0
値 3 = 残り 2 ボンド + 1

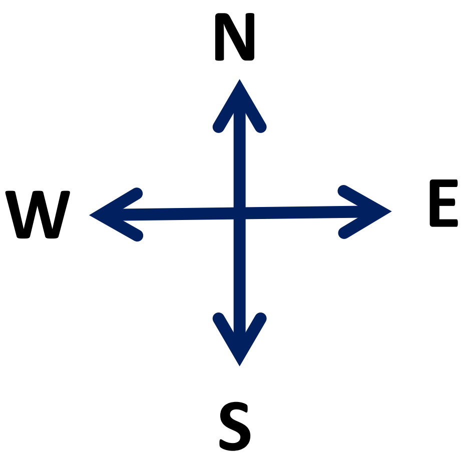


N < E < S < W とする

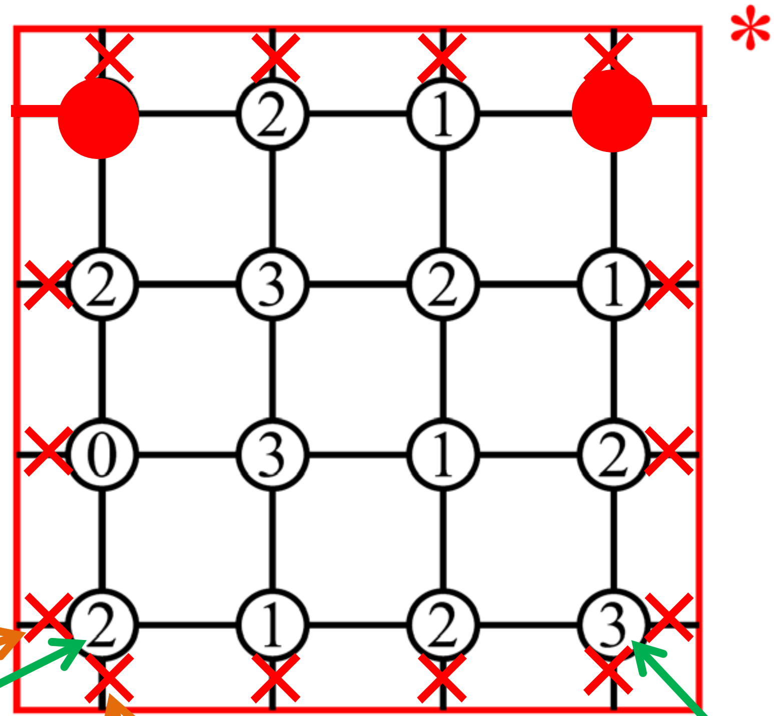


値 2 = 残り 2 ボンド **+0**

値 3 = 残り 2 ボンド **+ 1**



N < E < S < W とする

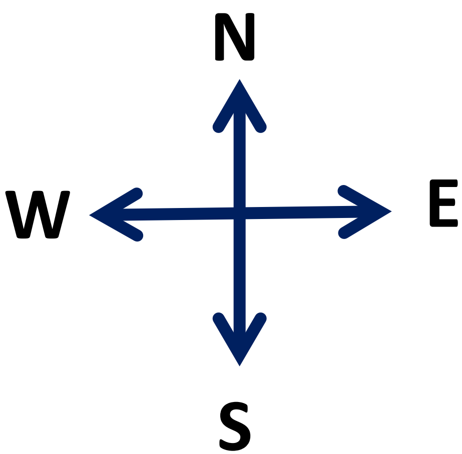


ボンド 1

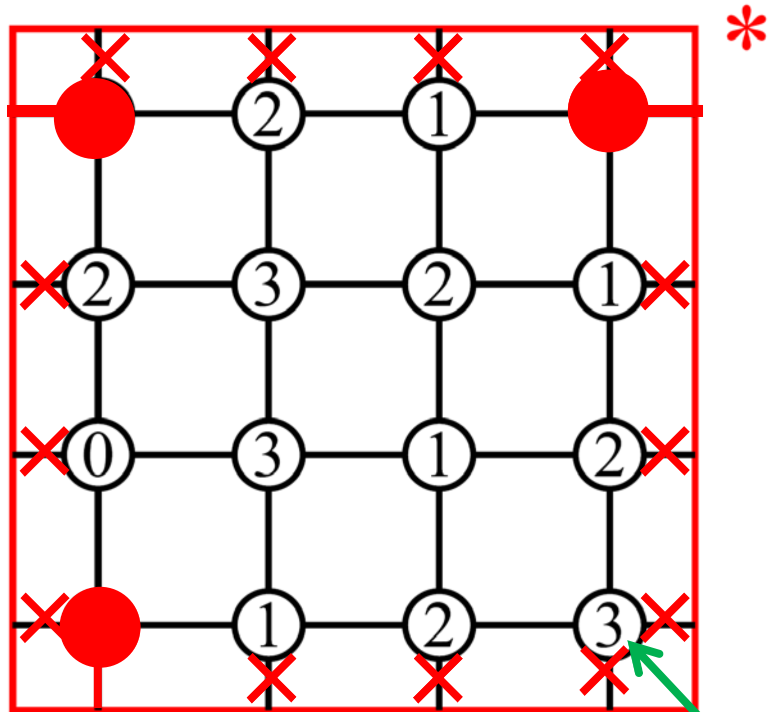
値 2 = 残り 2 ボンド +0

ボンド 0

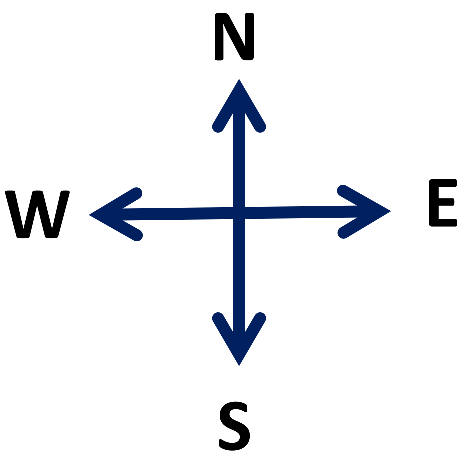
値 3 = 残り 2 ボンド + 1



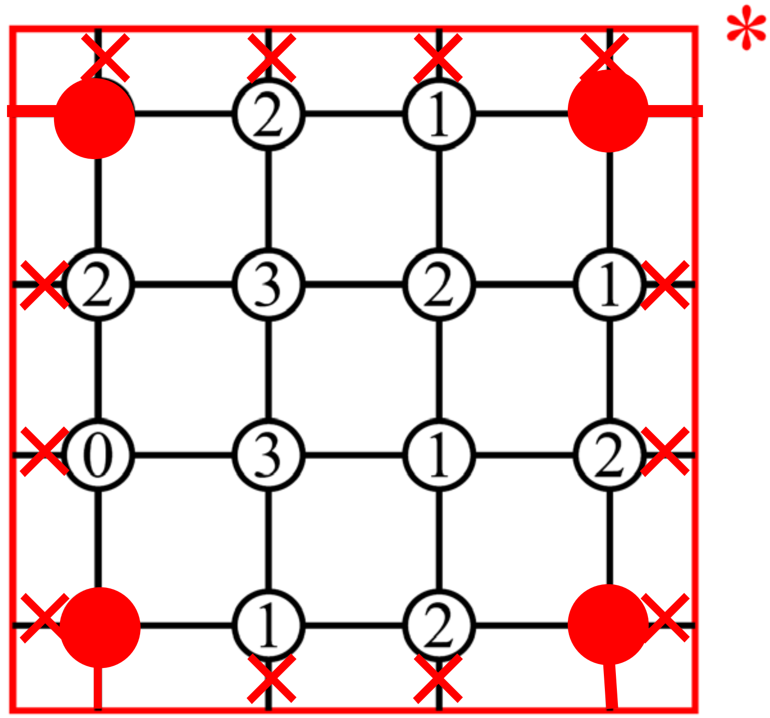
N < E < S < W とする

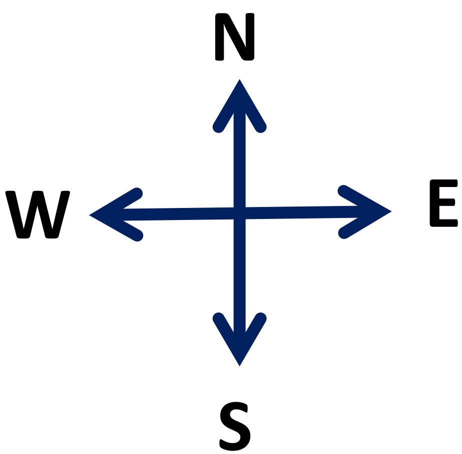


値 3 = 残り 2 ボンド **+ 1**

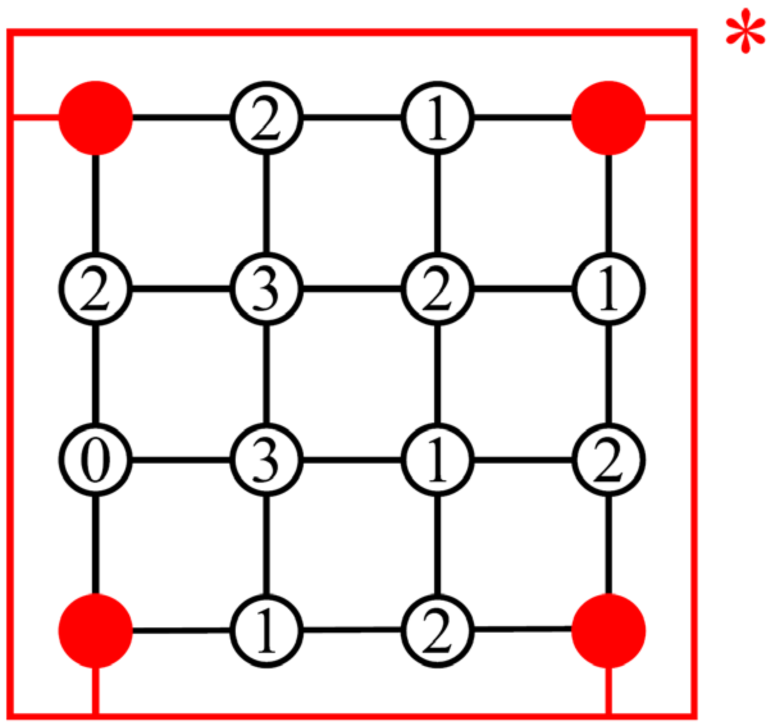


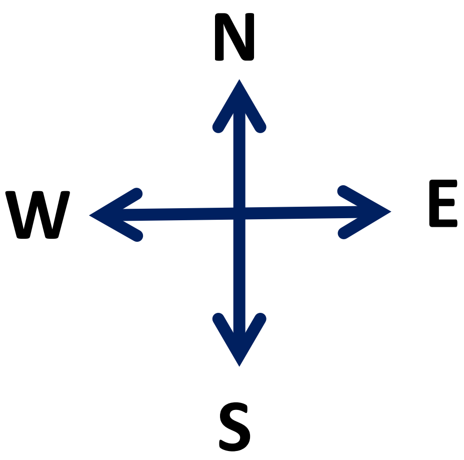
N < E < S < W とする



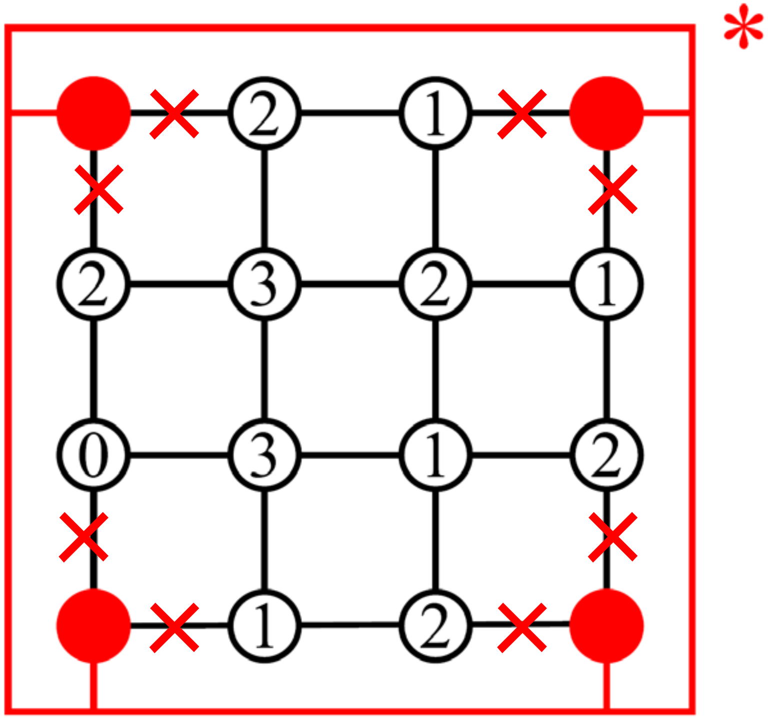


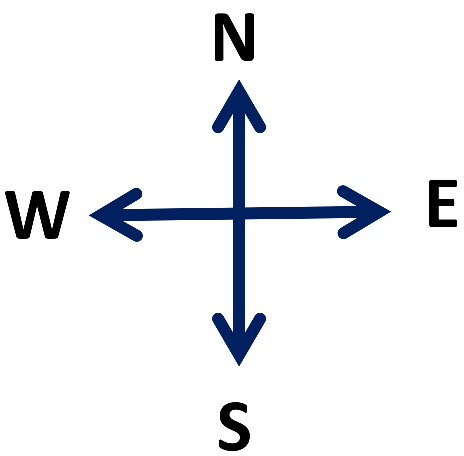
N < E < S < W とする



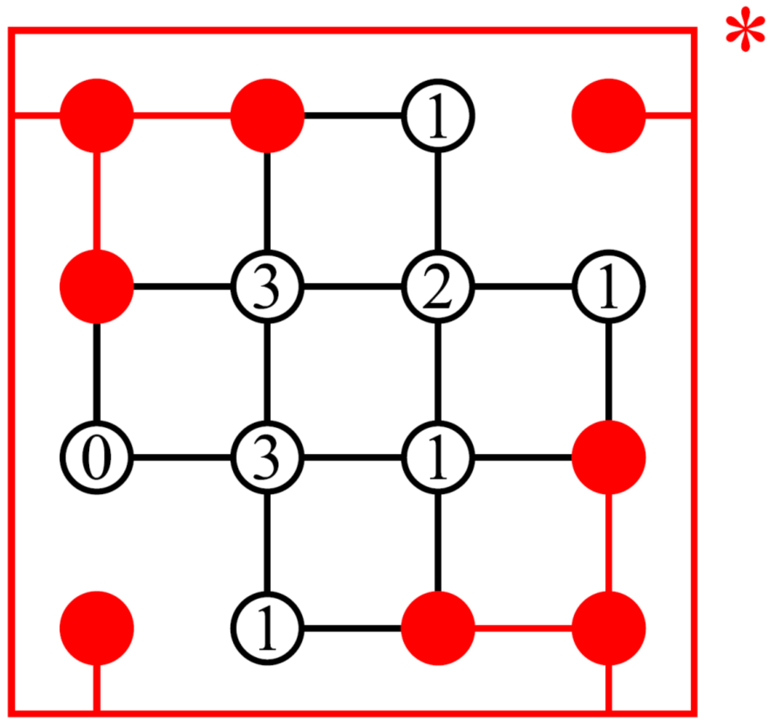


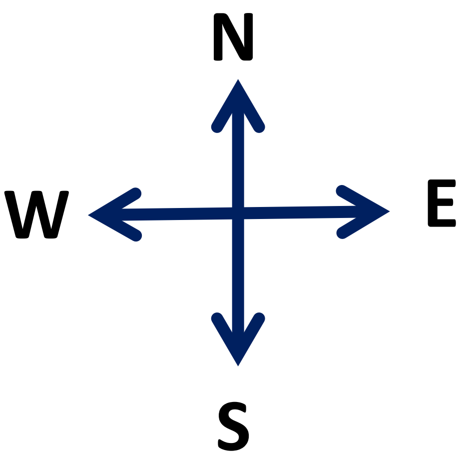
N < E < S < W とする



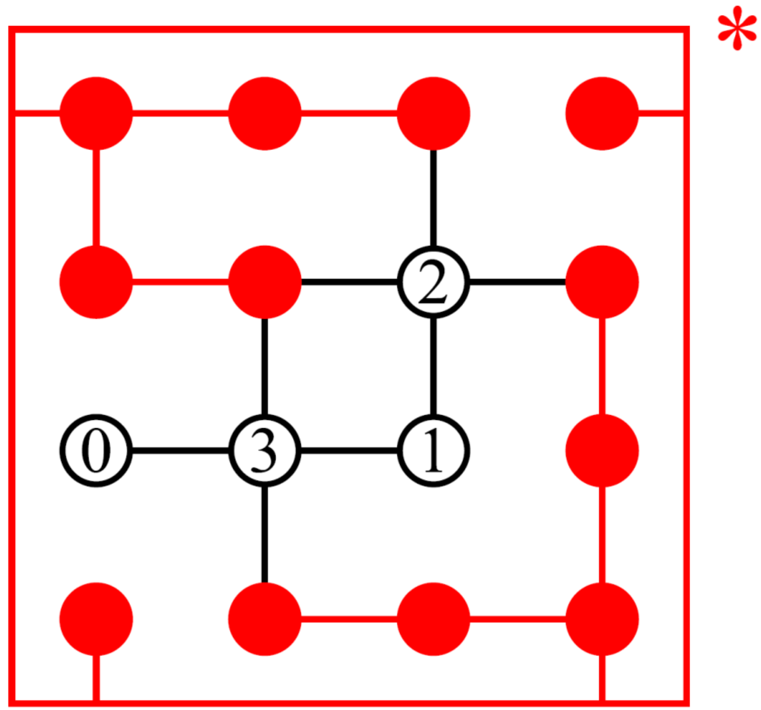


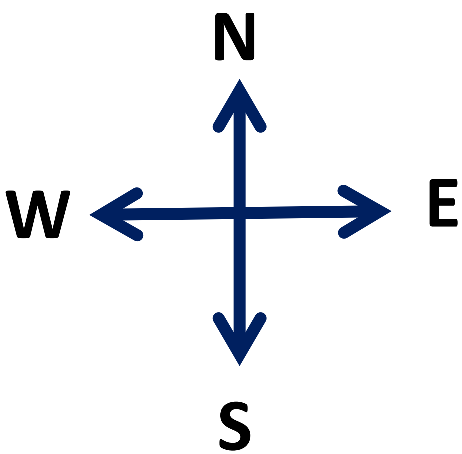
N < E < S < W とする



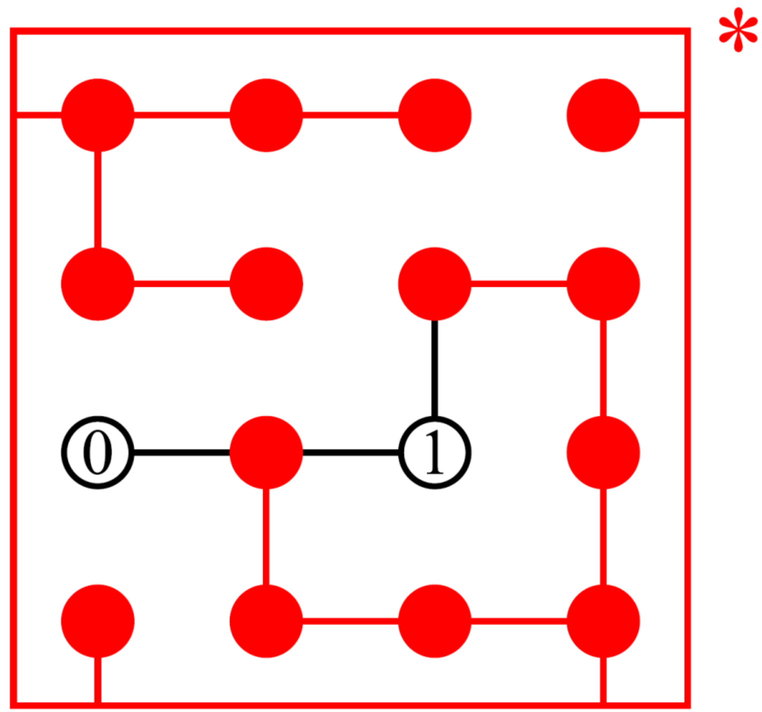


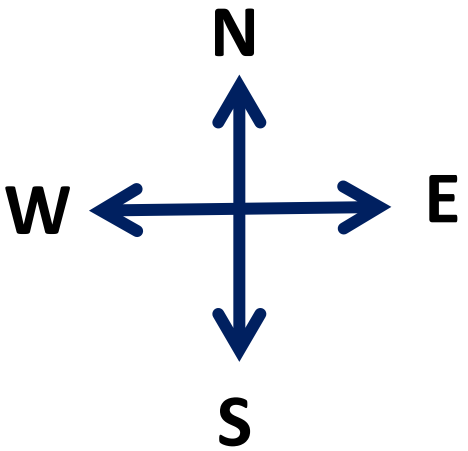
N < E < S < W とする



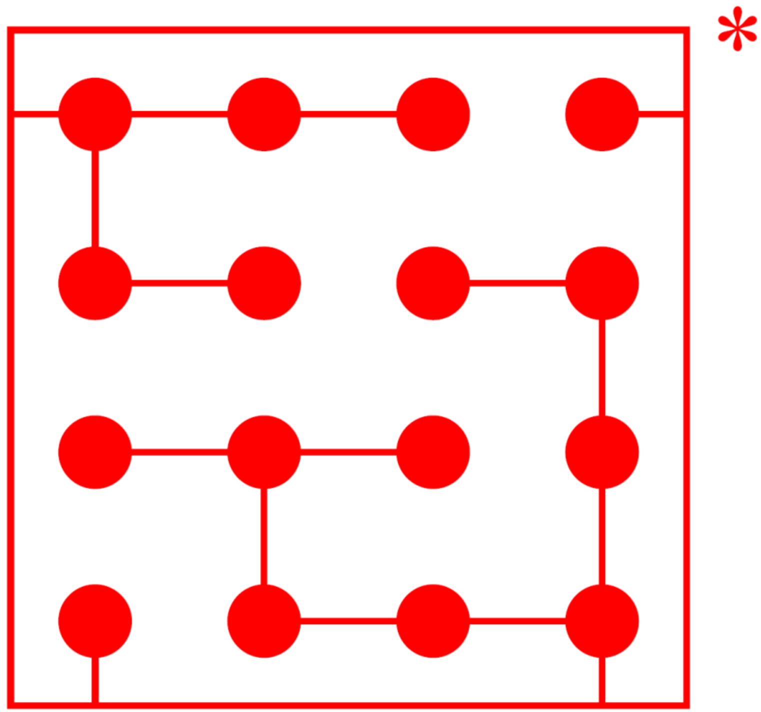


N < E < S < W とする





N < E < S < W とする



一度燃えてしまったサイト（樹木）は灰となり，２度とは燃えないので，
延焼していく経路にはループはできない．