**ダイナミカルなランダム行列と棲み分けの問題**

香取眞理

中央大学理工学部物理学科

直線上をブラウン運動する *N* 個の粒子を考える．各粒子は衝突すると対消滅してしまうものとする．このとき，スタートしてから時間 *t* の間たまたま衝突は起こらず，*N*粒子すべてが生き残っている確率は， *t* の関数としてどのように減少していくのであろうか．また，この確率の初期配置依存性はどのように表されるのであろうか．相転移・臨界現象の研究で著名な M. E. Fisher が1984年に提唱したこの問題は vicious walker （邪歩）問題とよばれる．初期配置を とする．ただし，

を満たすように粒子に番号付けをしておくことにする．上述の生存確率の漸近挙動は

で与えられる．すなわち，長時間領域での時間依存性は冪乗則に従い，その冪指数は

また，初期配置 ***x*** 依存性を表す関数 は，差積あるいは Vandermonde 行列式

で与えられる．は規格化因子である．

この１次元ブラウン粒子系に対して，*N*粒子がうまく棲み分けをして，衝突することなく共存しているという条件を課したとしよう．この条件の下で，粒子はどのように振る舞うのであろうか．この条件付き多粒子確率過程を非衝突ブラウン運動とよぶことにする．初期配置を不等式 (1) を満たすように与える．非衝突条件の下，時刻 で配置, が実現する確率密度は，次式で与えられる．

ここで，行列式の各成分を与える関数 は，１次元標準ブラウン運動の推移確率密度 である．

(5) 式において， の極限をとることができる．では*N*粒子すべてが原点にあるが， で不等式 (1) を満たす配置となり，以後もこの棲み分け状態が保たれるという状況である．この極限で (5) 式は

となる．ただし，は規格化因子である．因子 は，すべての粒子間に長距離斥力相互作用が働いていることを表している．この確率密度は，のエルミート・ランダム行列が，ガウス型ユニタリ・アンサンブル（ＧＵＥ）とよばれる統計集団にあるときの，固有値分布の確率密度に等しい．

　本講演では，棲み分けのモデルである非衝突ブラウン運動とダイナミカルなランダム行列理論との関係を解説する．さらに，次の点についても言及する予定である．

* 無限粒子（）系について．
* 粒子の衝突と，ある短いレンジ内での位置の交換を許す場合への拡張（これは量子戸田格子の理論と関係する）．
* Ginibre 行列式点過程と２次元平面上の棲み分け問題（下図参照）．



図２：複素ランダム行列の複素平面上の固有値分布として実現される Ginibre 点過程．粒子間に斥力相互作用が働き，棲み分けが実現している．（粒子数密度は図１と同じ．）

図１：Poisson点過程．平面上の一様ランダムな点の配置であるが，実現した配置には粒子分布の空間的な粗密が見られる．

参考文献：M. Katori : Bessel Process, Schramm-Loewner Evolution, and the Dyson Model, SpringerBriefs in Mathematical Physics, Springer (2016) 出版予定．