可換砂山模型の数理

香取眞理 (**中大理工**)

Mathematical aspects of the abelian sandpile models

Makoto Katori (*Department of Physics, Chuo University*)

砂山模型 (sandpile model) は，1987 年に Bak, Tang, Wiesenfeld によって導入された格子上の非平衡統計力学模型 (多粒子系の確率過程) であり，BTW 模型ともよばれる．通常の臨界現象は温度などの外部パラメータがちょうど臨界値 (連続相転移温度) となったときにだけ起こるが，雪崩 (山崩れ, avalanche) の規模分布は特にパラメータを調整することなく常にべき乗分布則を示すことから，自己組織化臨界現象 (self-organized criticality, SOC) を示す数理模型として，当時大きな話題となった [1,2,3].

模型が定義される格子を Λ と書くことにする．Dhar は 1990 年の論文 [4] で，格子点 $\mathbf{x}$ に砂粒を落としたことが引き金となって起こる雪崩を，格子上の砂山の高さ配置に作用する演算子と捉え，$a(\mathbf{x})$ と表した．雪崩が起こる前の安定な砂山の高さ配置を $h_t = \{h_t(\mathbf{z})\}_{\mathbf{z}\in\Lambda}$ と書くことにすると，この雪崩が終わった後の (再び安定な) 砂山配置は $h_{t+1} = a(\mathbf{x})h_t = \{(a(\mathbf{x})h_t)(\mathbf{z})\}_{\mathbf{z}\in\Lambda}$ で与えられることになる．BTW 模型では，不安定高さの閾値 $h_{\rm c}$ と，toppling とよばれる各格子点上での砂山崩壊 (砂粒の周囲格子点への流出と一部の散逸) の仕方が与えられており，雪崩は決定論的なダイナミクスに従う．しかし，砂粒を落とす格子点位置 $\mathbf{x}$ は Λ 上の一様分布に従ってランダムに選んでいくことで，模型は確率過程 $(h_t)_{t=0,1,2,\dots}$ となっている．Dhar は，任意の 2 格子点 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda$ に対して，この雪崩演算子 $a(\mathbf{x})$ と $a(\mathbf{y})$ が可換 $[a(\mathbf{x}), a(\mathbf{y})] = 0$ であることに注目し，Abelian sandpile model (ASM) という呼び名を提唱した [4]．雪崩演算子が可換群 (abelian group) を成すことを強調し，数理物理の研究対象としての魅力を表現したものであり，この名前は定着した．

雪崩過程の可換性は現実では期待できない．そのためこの模型は，その後大いに発展した粉粒体物理学や統計力学模型による地震研究からは遊離した存在となった．しかしながら，局所的な堆積と (系の境界という遠方での散逸が起こるまでは継続してしまう) 大域的な雪崩とが釣り合うことで維持される動的な定常状態について，この 20 年ほどの間の研究の進展の結果，着実に理解が深まってきている．本講演では，以下の 2 点に着目して研究の進展を紹介する．

(1) 砂山高さがすべての格子点上で不安定高さの閾値 $h_{\rm c}$ より低ければ配置は安定である．しかし，ASM の定常状態では，この安定配置全体から見ると指数関数的に数が少ない配置 (再帰配置とよぶ) だけが出現する．定常分布は，この再帰配置の集合上の一様分布である (等分配則)．再帰配置は，(格子境界で) 散逸された粒子の行き先として導入される付加的な格子点 $\mathbf{r}$ を根 (root) とした格子 Λ 上の全域木 (spanning tree) グラフと 1 対 1 対応する [4,5]．この対応のお蔭で，Kirchhoff の行列式表現，ランダムウォークのグリーン関数，あるいはループ除去ランダムウォーク (LERW) の知見が使え，動的定常状態における雪崩規模を表すいくつかの物理量を厳密に計算

することが可能となる．この「砂山-全域木対応」は，任意の次元，格子で成立するため，バルクでの散逸を導入して臨界性を破った模型や, 異方的な模型 [6,7]，あるいは可変な境界条件を課した模型 [8] でも同様の計算ができる．この意味で，ASM は強い可積分性をもっている．

(2) 上述の ASM の「砂山-全域木対応」は，焼失アルゴリズム (burning algorithm) によって具現化されるが，このアルゴリズムは $\Lambda \cup \{\mathbf{r}\}$ 上の大域的操作からなる [5]．このため，定常 ASM の砂山高さの 1 点期待値 $\langle \delta(h(\mathbf{x}) - n) \rangle, 0 \leq n < h_{\mathrm{c}}$ というような，砂山模型においては局所的で単純に見える物理量を求める際にも，全域木の大域的な様相を計算に取込む必要が生じる (ただし，最低高さ $n = 0$ に対しては局所的計算だけで済む)．「砂山-全域木対応」は複雑性の尺度においても双対をなすのである．そのため，この種の研究は 2 次元正方格子上の一様な単純・対称 ASM に模型を限定して進められている．(この場合，バルクでは $h_{\mathrm{c}} = 4$ であり安定な高さは $h(\mathbf{x}) \in \{0, 1, 2, 3\}$ である.) この設定は，2 次元ランダムウォークのグリーン関数の対角成分 $G_{0,0}$ が格子サイズの対数に比例して発散するという特殊事情と絡み合って，挑戦的な研究課題となっている [8,9]．高さ $n = 0$ と $n = 1$ の砂山の相関関数 ($(0, 1)$-相関関数) に対して (当初の SOC 研究で強調された距離のべき乗関数に乗ずる形で) 対数補正が正確に計算され, その結果と (局所的計算で求められる) $(0, 0)$-砂山高さ相関関数を用いると，$(0, 2)$ および, $(0, 3)$-砂山高さ相関関数も記述できることが明らかになった [10]．これは，格子上の砂山高さの揺動場 $\xi_n(\mathbf{x}) \equiv \delta(h(\mathbf{x}) - n) - \langle \delta(h(\mathbf{x}) - n) \rangle, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2$ の連続スケーリング極限が，中心元 $c = -2$ の対数共形場理論 (logarithmic conformal field theory, LCFT) で記述されるという当初からの予想 [5] を支持するばかりでなく，LCFT のプライマリー場 ϕ とその対数的な双対場 ψ が ξ_0 と ξ_1 に対応しており，ξ_2 と ξ_3 はそれらの線形結合で与えられるという詳細に踏み込みつつある [10]．

可換砂山模型の研究で培われた局所-大域の双対概念が，本シンポジウムで報告される他の研究に何らかの示唆を与えることを期待したい．

[1] Bak, P., Tang, C., Wiesenfeld, K.: Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).

[2] 香取眞理：「複雑系を解く確率モデル」, ブルーバックス B1193, 講談社, 1997.

[3] Pruessner, G.: *Self-Organised Criticality*, Cambridge University Press, 2012.

[4] Dhar, D.: Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990).

[5] Majumdar, S. N., Dhar, D.: J. Phys. A **24**, L357 (1991); Physica A **185**, 129 (1992).

[6] Tsuchiya, T., Katori, M.: Phys. Rev. E **61**, 1183 (2000); 香取眞理：日本物理学会誌 **55** (No. 4), 276 (2000).

[7] Katori, M.: arXiv:math-ph/1505.00334; to appear in MI lecture note (2015), http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/eng/publishes/pub_inner/id:2

[8] Jeng, M., Piroux, G., Ruelle, P.: J. Stat. Mech. P10015 (2006).

[9] Priezzhev, V. B.: J. Stat. Phys. **74**, 955 (1994).

[10] Poghosyan, V. S., Grigorev, S. Y., Priezzhev, V. B., Ruelle, P.: J. Stat. Mech. P07025 (2010).