

ダイナミカルなランダム行列と 棲み分けの問題 (part 1/3)

かとり まこと

香取眞理 (中央大学)

生命ダイナミクスの数理とその応用
理論からのさらなる深化

東京大学大学院数理科学研究科

2015年12月9日～11日



Focus: How Animals Avoid Each Other

November 12, 2010 • *Phys. Rev. Focus* 26, 20

Foraging animals or other randomly moving entities can more easily avoid each other by taking more long-distance jumps, according to theoretical results, which may also apply to epidemics and database searches.



National Geographic/Punchstock

Vicious Lévy Flights

Igor Goncharenko and
Ajay Gopinathan

Phys. Rev. Lett. 105,
190601 (2010)

Published November 5,
2010

References

1. N. E. Humphries et al., “Environmental Context Explains Lévy and Brownian Movement Patterns of Marine Predators,” *Nature (London)* 465, 1066 (2010)
2. F. Bartumeus, J. Catalan, U. L. Fulco, M. L. Lyra, and G. M. Viswanathan, “Optimizing the Encounter Rate in Biological Interactions: Lévy versus Brownian Strategies,” *Phys. Rev. Lett.* 88, 097901 (2002)
3. J. Cardy and M. Katori, “Families of Vicious Walkers,” *J. Phys. A* 36, 609 (2003)

<https://physics.aps.org/story/v26/st20>[2015/11/20 11:33:02]



Going separate ways. New calculations could help uncover whether spider monkeys have adapted a foraging pattern that avoids run-ins with other monkeys. The theory could also apply to molecules diffusing in turbulent fluids or search strategies in large databases.

The standard example of a random walk is a drunk man stumbling away from the bar in random directions for each step. Textbooks show calculations of various quantities, such as the time it takes the drunk to travel some distance or the likelihood that he returns to his starting point.

In the 1980s, researchers added a sinister twist: they imagined several drunks on the streets, each carrying a gun. If two of these so-called **“vicious” walkers** met, they would shoot each other.

This scenario may mimic real physical situations, as in the random movement of domain boundaries in a magnet. Wherever two boundaries meet, they annihilate each other because there is no longer a domain between them.

Vicious Walker (邪歩) 問題

M. E. Fisher : Walks, walls, wetting, and melting,
J. Stat. Phys. **34**, 667--729 (1984)

直線上をブラウン運動する N 個の粒子を考える. 各粒子は衝突すると対消滅してしまうものとする.

このとき, スタートしてから時間 t の間たまたま衝突は起こらず, N 粒子すべてが生き残っている確率は, t の関数としてどのように減少していくのであろうか.

また, この確率の初期配置依存性はどのように表されるのであろうか.



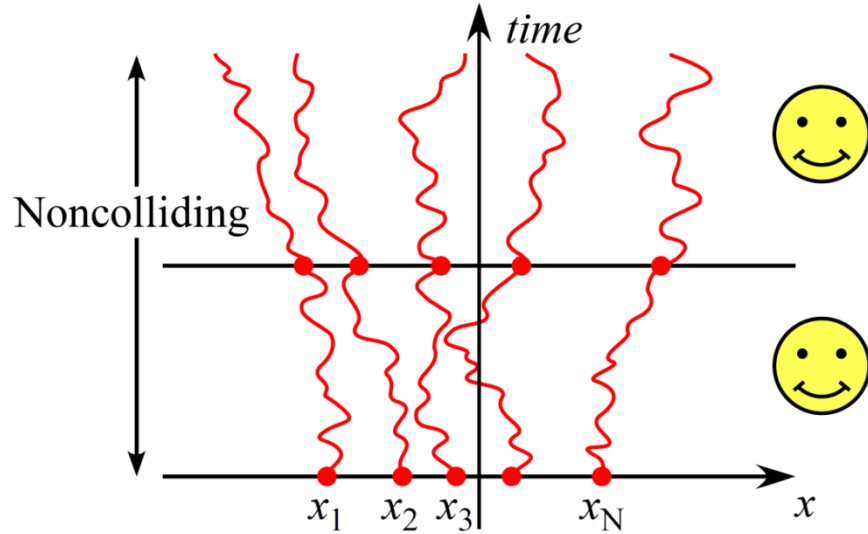
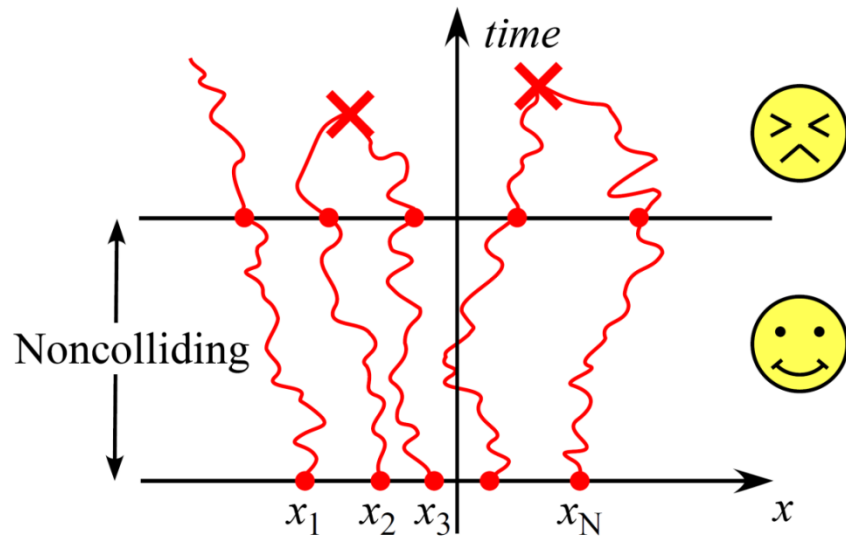
Peace-keeping probability



survival probability

(probability that

all N particles survive up to time t)



(1次元上の)動的な棲み分けの問題

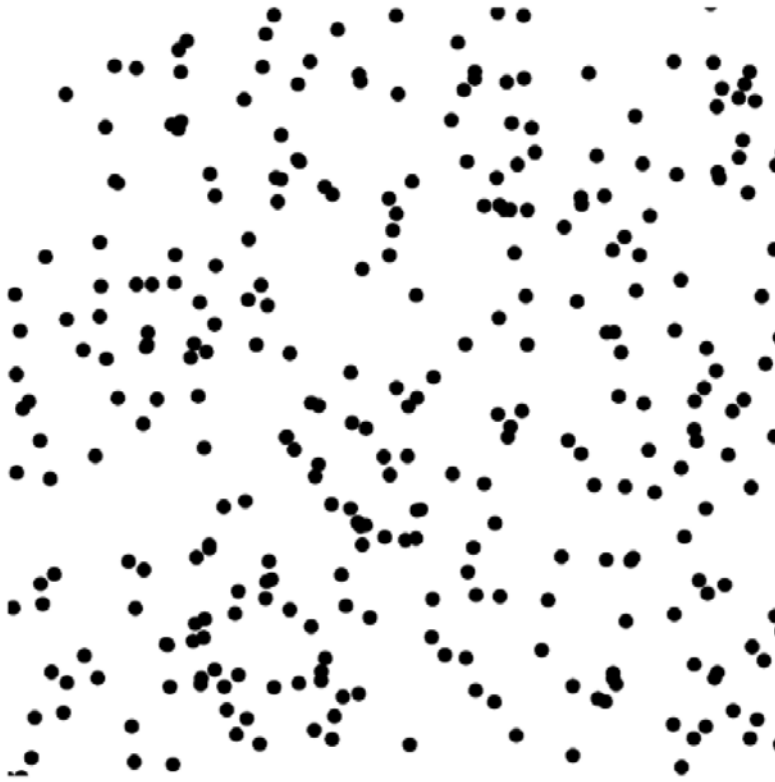


図 1 : Poisson 点過程. 平面上の一様ランダムな点の配置であるが, 実現した配置には粒子分布の空間的な粗密が見られる.

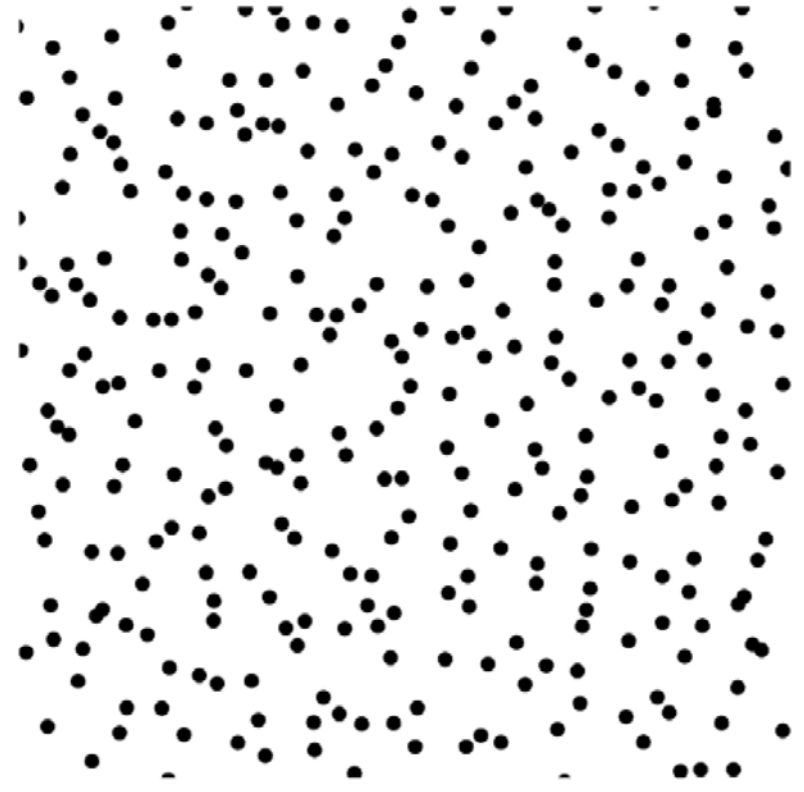


図 2 : 複素ランダム行列の複素平面上的固有値分布として実現される Ginibre 点過程. 粒子間に斥力相互作用が働き, 棲み分けが実現している. (粒子数密度は図 1 と同じ.)

2次元上の静的な棲み分けの問題

1. Vicious Walker (邪歩)問題

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$ walker の数

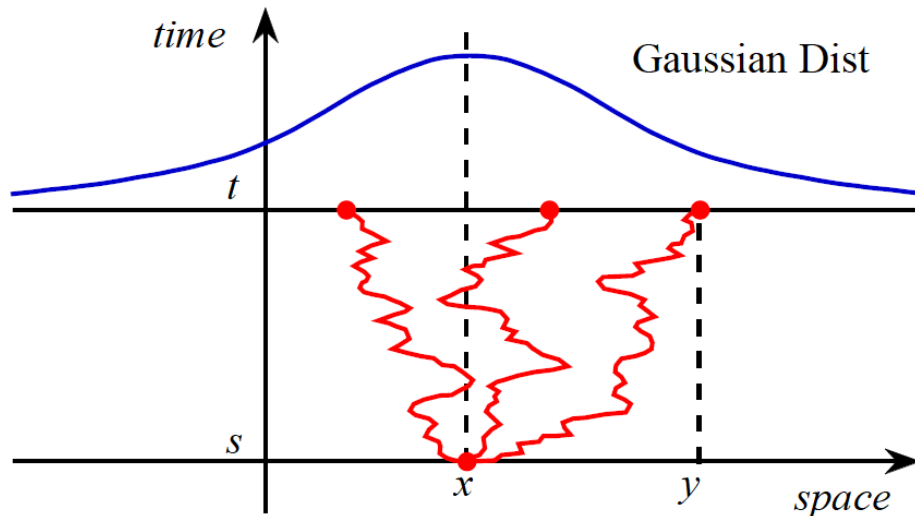
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{W}_N,$

$$\mathbb{W}_N \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\} \quad A_{N-1} \text{ 型ワイル領域}$$

- N 個の独立な 1 次元標準ブラウン運動 (時間間隔 t での分散 $\sigma^2 = t$)

$$\mathbf{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_N(t)), \quad t \geq 0, \quad B_j(0) = x_j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

各々の $B_j(t)$ の $x \in \mathbb{R}$ から $y \in \mathbb{R}$ への時間 $t-s > 0$ の間の推移確率密度 $p_{\text{BM}}(t, y|x) = \frac{e^{-(y-x)^2/2(t-s)}}{\sqrt{2\pi(t-s)}}.$



Lemma 1.1

$\mathbf{x} \in \mathbb{W}_N$ からスタートした N 個の 1 次元ブラウン運動が、時間 $t > 0$ の間衝突することなく、時刻 t で配置 $\mathbf{y} \in \mathbb{W}_N$ が実現される確率は次で与えられる.

$$q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{BM}}(t, y_j | x_k) \right].$$

Karlin–McGregor formula (確率論)

Lindström–Gessel–Viennot formula (数え上げ組み合わせ論)

(フェルミ粒子系の波動関数を与える) Slater 行列式 (量子力学)



時刻 t で全 N 粒子が生き残っている生存確率は (初期配置 $\mathbf{x} \in \mathbb{W}_N$ に対して)

$$\begin{aligned} P_N(t | \mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{W}_N} q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \int \cdots \int_{y_1 < y_2 < \cdots < y_N} \det_{1 \leq j, k \leq N} \left[p_{\text{BM}}(t, y_j | x_k) \right] dy_1 dy_2 \cdots dy_N. \end{aligned}$$

$t \rightarrow \infty$ での漸近形
 (ブラウン運動の拡散型スケーリング)

$\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}$

Lemma 1.2

次の表現が成り立つ.

$$q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{j=1}^N \frac{e^{-(x_j^2 + y_j^2)/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \times \det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{x_j y_k / t}],$$

$$\det_{1 \leq j, k \leq N} [e^{x_j y_k / t}] = h_N \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} \right) h_N \left(\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{t}} \right) \sum_{\mu: \ell(\mu) \leq N} \frac{1}{\prod_{j=1}^N (\mu_j + N - j)!} s_\mu \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} \right) s_\mu \left(\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{t}} \right).$$

ただしここで,

$$h_N(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) = \det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{k-1}], \quad \text{差積 (Vandermonde 行列式),}$$

$$s_\mu(\mathbf{x}) = \frac{\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{\mu_k + N - k}]}{\det_{1 \leq j, k \leq N} [x_j^{N - k}]}, \quad \text{Schur 多項式,}$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell)$ は長さ $\ell = \ell(\mu)$ の分割 (partition) を表す,

$$\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{t}}, \frac{x_2}{\sqrt{t}}, \dots, \frac{x_N}{\sqrt{t}} \right).$$

$$q_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{C_N} t^{-N^2/2} h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}) e^{-|\mathbf{y}|^2/2t} \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right) \right\} \quad \text{as } \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0,$$

$$C_N = (2\pi)^{N/2} \prod_{n=1}^{N-1} n!.$$

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2t}$$

生存確率

$$\begin{aligned} P_N(t, \mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{W}_N} q_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{R}^N} |q_N(t, \mathbf{y}|\mathbf{x})| d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Lemma 1.3

Selberg-Mehta-Macdonald の積分公式

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|\mathbf{x}|^2} |h_N(\mathbf{x})|^{2\gamma} d\mathbf{x} = (2\pi)^{N/2} (2a)^{-N(\gamma(N-1)+1)/2} \prod_{j=1}^N \frac{\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)}.$$

ただし, $a > 0$ であり, Γ はガンマ関数; $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du, \Re z > 0$

Theorem 1.1

$\mathbf{x} \in \mathbb{W}_N$ からスタートした N 個の vicious ブラウン粒子が、時刻 $t > 0$ でもすべて生き残っている生存確率は、 $\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$ で次の漸近形をもつ。

$$P_N(t|\mathbf{x}) = \frac{C'_N}{C_N} t^{-N(N-1)/4} h_N(\mathbf{x}) \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right) \right\} \quad \text{as } \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0,$$
$$C'_N = 2^{N/2} \prod_{n=1}^N \Gamma(n/2), \quad C_N = (2\pi)^{N/2} \prod_{n=1}^N n!.$$

- 生存確率は t の**冪乗則**に従って減少する。(指数関数的ではない… 遅い減少)
- 冪乗則 $t^{-\varphi(N)}$ の冪指数は

$$\varphi(N) = \frac{N(N-1)}{4} = \frac{1}{2} \binom{N}{2} \quad N \text{ の 2 次関数 (マルチ・フラクタル性).}$$

Theorem 1.1

$\mathbf{x} \in \mathbb{W}_N$ からスタートした N 個の vicious ブラウン粒子が、時刻 $t > 0$ でもすべて生き残っている生存確率は、 $\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$ で次の漸近形をもつ。

$$P_N(t|\mathbf{x}) = \frac{C'_N}{C_N} t^{-N(N-1)/4} h_N(\mathbf{x}) \times \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}}\right) \right\} \quad \text{as } \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0,$$
$$C'_N = 2^{N/2} \prod_{n=1}^N \Gamma(n/2), \quad C_N = (2\pi)^{N/2} \prod_{n=1}^N n!.$$

- $h_N(\mathbf{x})$ に比例する。

$$h_N(x) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_k - x_j) \text{ は } N \text{ 次元ラプラシアン } \Delta^{(N)} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \text{ に対して}$$

調和的 (harmonic); $\Delta^{(N)} h_N(\mathbf{x}) = 0$, かつ,

$$h_N(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{W}_N,$$

$$h_N(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathbb{W}_N,$$

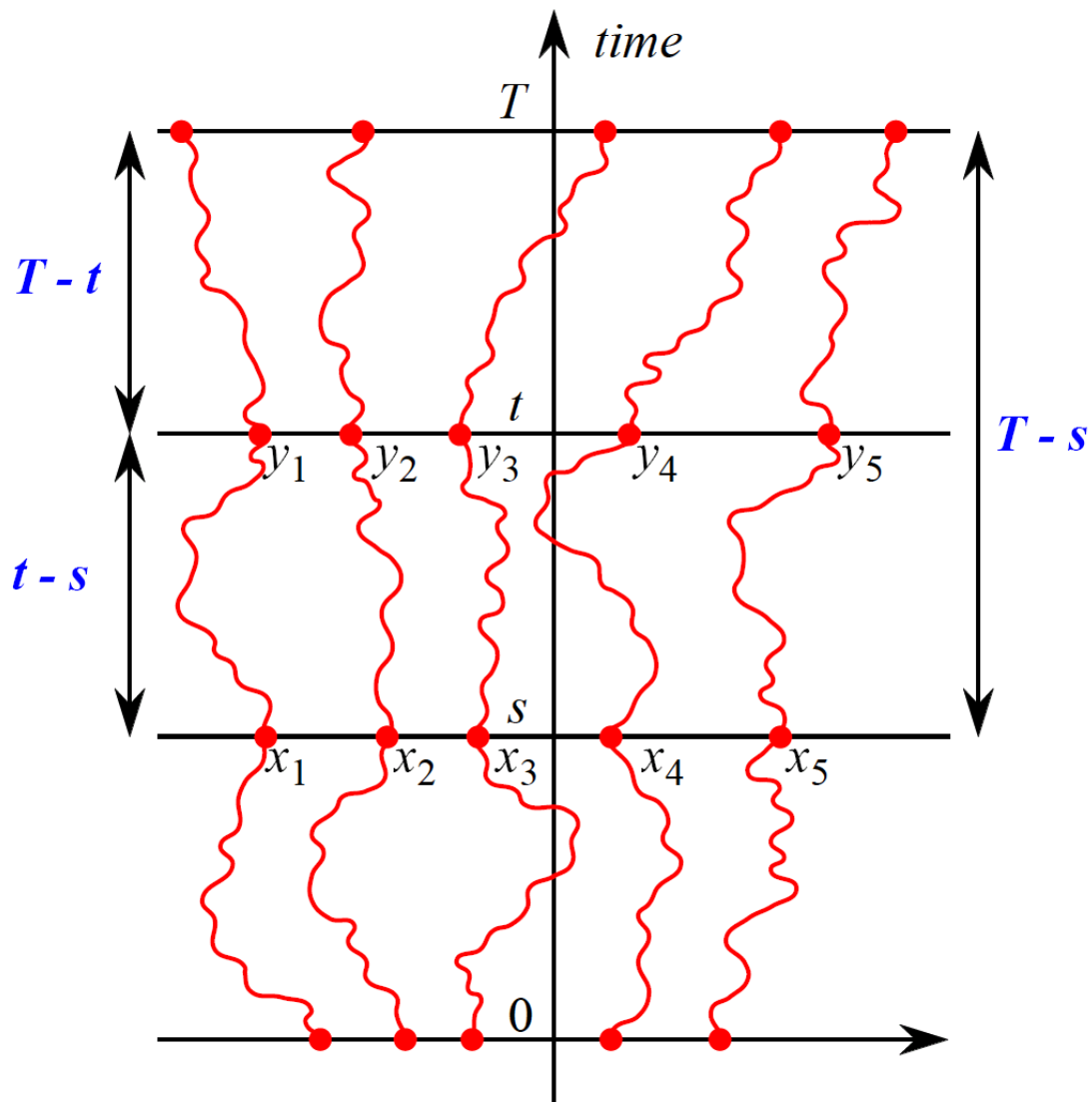
$$\mathbb{W}_N = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 < x_2 < \dots < x_N\}.$$

2. 非衝突ブラウン運動 (動的棲み分けの確率過程モデル)

全 N 粒子生存確率 $P_N(t|\mathbf{x}) \sim c(N)t^{-\varphi(N)}h_N(\mathbf{x}), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$

- t の冪乗関数に比べて遅い減少.
- 全粒子が存在しているという条件の下での粒子の振舞いを見てみたい.
この条件の下での, 時刻 $s \rightarrow t$ の間の $\mathbf{x} \in \mathbb{W}_N \rightarrow \mathbf{y} \in \mathbb{W}_N$ の推移確率密度は次の極限で与えられる. (ブラウン運動のマルコフ性を用いた.)

$$\begin{aligned} p_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P_N(T-t|\mathbf{y})q_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_N(T|\mathbf{x})} \\ &= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} q_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}). \end{aligned}$$



$$p_N(t - s, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}_N(T - t | \mathbf{y}) q_N(t - s, \mathbf{y} | \mathbf{x})}{\mathbb{P}_N(T | \mathbf{x})}$$

2. 非衝突ブラウン運動 (動的棲み分けの確率過程モデル)

全 N 粒子生存確率 $P_N(t|\mathbf{x}) \sim c(N)t^{-\varphi(N)}h_N(\mathbf{x}), \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$

- t の冪乗で減少. 指数関数に比べて遅い減少.
- 全 N 粒子が存在しているという条件の下での粒子の振舞いを見てみたい.
この条件の下での, 時刻 $s \rightarrow t$ の間の $\mathbf{x} \in \mathbb{W}_N \rightarrow \mathbf{y} \in \mathbb{W}_N$ の推移確率密度は次の極限で与えられる. (ブラウン運動のマルコフ性を用いた.)

$$\begin{aligned} p_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{P_N(T-t|\mathbf{y})q_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x})}{P_N(T|\mathbf{x})} \\ &= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} q_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}). \end{aligned}$$

- この条件の下での N 粒子ブラウン運動系を非衝突ブラウン運動 (noncolliding BM) とよぶことにする.

2.1 特別な初期配置非衝突BMと ランダム行列理論

$$p_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x})$$

Lemma 1.2

➡ $q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) \simeq \frac{1}{C_N} t^{-N^2/2} h_N(\mathbf{x}) h_N(\mathbf{y}) e^{-|\mathbf{y}|^2/2t}, \quad \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$

Lemma 2.1

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow 0} p_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{t^{-N^2/2}}{C_N} h_N(\mathbf{y})^2, \quad t > 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{W}_N.$$

これとまったく同じ形の確率密度関数がランダム行列理論で知られていた。

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$, $i = \sqrt{-1}$
- $N \times N$ エルミート行列に値をもつランダム行列

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} + i\tilde{X}_{12} & X_{13} + i\tilde{X}_{13} & \cdots & X_{1N} + i\tilde{X}_{1N} \\ X_{12} - i\tilde{X}_{12} & X_{22} & X_{23} + i\tilde{X}_{23} & \cdots & X_{2N} + i\tilde{X}_{2N} \\ X_{13} - i\tilde{X}_{13} & X_{23} - i\tilde{X}_{23} & X_{33} & \cdots & X_{3N} + i\tilde{X}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{1N} - i\tilde{X}_{1N} & X_{2N} - i\tilde{X}_{2N} & X_{3N} - i\tilde{X}_{3N} & \cdots & X_{NN} \end{pmatrix}$$

- 各成分はそれぞれ**独立**に次のような**正規分布**に従う。

[対角成分] $X_{jj} \sim N(0, \sigma^2), 1 \leq j \leq N$: 平均 0, 分散 σ^2

$$P(X_{jj} \in [m_{jj}, m_{jj} + dm]) = p_{\sigma^2}(m_{jj})dm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-m_{jj}^2/2\sigma^2} dm, 1 \leq j \leq N.$$

[非対角成分実部] $X_{jk} \sim N(0, \sigma^2/2), 1 \leq j < k \leq N$: 平均 0, 分散 $\sigma^2/2$

$$P(X_{jk} \in [m_{jk}, m_{jk} + dm]) = p_{\sigma^2/2}(m_{jk})dm = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-m_{jk}^2/\sigma^2} dm, 1 \leq j < k \leq N.$$

[非対角成分虚部] $\tilde{X}_{jk} \sim N(0, \sigma^2/2), 1 \leq j < k \leq N$: 平均 0, 分散 $\sigma^2/2$

$$P(\tilde{X}_{jk} \in [\tilde{m}_{jk}, \tilde{m}_{jk} + dm]) = p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk})dm = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\tilde{m}_{jk}^2/\sigma^2} dm, 1 \leq j < k \leq N.$$

- $N \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$, $i = \sqrt{-1}$
- $N \times N$ エルミート行列に値をもつランダム行列

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} + i\tilde{X}_{12} & X_{13} + i\tilde{X}_{13} & \cdots & X_{1N} + i\tilde{X}_{1N} \\ X_{12} - i\tilde{X}_{12} & X_{22} & X_{23} + i\tilde{X}_{23} & \cdots & X_{2N} + i\tilde{X}_{2N} \\ X_{13} - i\tilde{X}_{13} & X_{23} - i\tilde{X}_{23} & X_{33} & \cdots & X_{3N} + i\tilde{X}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{1N} - i\tilde{X}_{1N} & X_{2N} - i\tilde{X}_{2N} & X_{3N} - i\tilde{X}_{3N} & \cdots & X_{NN} \end{pmatrix}$$

- 各成分はそれぞれ**独立**に次のような**正規分布**に従う。

[対角成分] $X_{jj} \sim N(0, \sigma^2), 1 \leq j \leq N$: 平均 0, 分散 σ^2

$$P(X_{jj} \in [m_{jj}, m_{jj} + dm]) = p_{\sigma^2}(m_{jj})dm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-m_{jj}^2/2\sigma^2} dm, 1 \leq j \leq N.$$

[非対角成分実部] $X_{jk} \sim N(0, \sigma^2/2), 1 \leq j < k \leq N$: 平均 0, 分散 $\sigma^2/2$

$$P(X_{jk} \in [m_{jk}, m_{jk} + dm]) = p_{\sigma^2/2}(m_{jk})dm = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-m_{jk}^2/\sigma^2} dm, 1 \leq j < k \leq N.$$

[非対角成分虚部] $\tilde{X}_{jk} \sim N(0, \sigma^2/2), 1 \leq j < k \leq N$: 平均 0, 分散 $\sigma^2/2$

$$P(\tilde{X}_{jk} \in [\tilde{m}_{jk}, \tilde{m}_{jk} + dm]) = p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk})dm = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\tilde{m}_{jk}^2/\sigma^2} dm, 1 \leq j < k \leq N.$$

- このランダム行列の実現値（エルミート行列）を

$$M = (M_{jk})_{1 \leq j, k \leq N} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} + i\tilde{m}_{12} & m_{13} + i\tilde{m}_{13} & \cdots & m_{1N} + i\tilde{m}_{1N} \\ m_{12} - i\tilde{m}_{12} & m_{22} & m_{23} + i\tilde{m}_{23} & \cdots & m_{2N} + i\tilde{m}_{2N} \\ m_{13} - i\tilde{m}_{13} & m_{23} - i\tilde{m}_{23} & m_{33} & \cdots & m_{3N} + i\tilde{m}_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{1N} - i\tilde{m}_{1N} & m_{2N} - i\tilde{m}_{2N} & m_{3N} - i\tilde{m}_{3N} & \cdots & m_{NN} \end{pmatrix}$$

と書くことにする.

- 実現確率

$$\begin{aligned} P(X \in [M, M + dM]) &= \prod_{j=1}^N \left(p_{\sigma^2}(m_{jj}) dm \right) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(p_{\sigma^2/2}(m_{jk}) dm \times p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk}) dm \right) \\ &= \prod_{j=1}^N p_{\sigma^2}(m_{jj}) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(p_{\sigma^2/2}(m_{jk}) \times p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk}) \right) \times dm^N \times dm^{2 \times N(N-1)/2}. \end{aligned}$$

- ここで


$$dm^N \times dm^{2 \times N(N-1)/2} = dm^{N^2} \equiv \mathcal{U}(dM) : N^2 \text{次元実空間 } R^{N^2} \text{ の体積要素} \implies d^{N^2} x.$$

- また,

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=1}^N p_{\sigma^2}(m_{jj}) \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(p_{\sigma^2/2}(m_{jk}) \times p_{\sigma^2/2}(\tilde{m}_{jk}) \right) \\
&= \prod_{j=1}^N \frac{e^{-m_{jj}^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \times \prod_{1 \leq j < k \leq N} \left(\frac{e^{-m_{jk}^2/\sigma^2}}{\sqrt{\pi\sigma}} \frac{e^{-\tilde{m}_{jk}^2/\sigma^2}}{\sqrt{\pi\sigma}} \right) \\
&= \frac{\sigma^{-N^2}}{2^{N/2}\pi^{N^2/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \sum_{j=1}^N m_{jj}^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq N} (m_{jk}^2 + \tilde{m}_{jk}^2) \right\} \right].
\end{aligned}$$

である.

- ここで



$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N m_{jj}^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq N} (m_{jk}^2 + \tilde{m}_{jk}^2) \\
&= \sum_{j=1}^N m_{jj}^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq N} |m_{jk} + i\tilde{m}_{jk}|^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq N} |m_{jk} - i\tilde{m}_{jk}|^2 \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N |M_{jk}|^2 = \text{tr}(\mathbf{M}^\dagger \mathbf{M}).
\end{aligned}$$

である.

$$P(X \in [M, M + dM]) = \mu(M) \mathcal{U}(dM),$$

$$\mu(M) = \frac{\sigma^{-N^2}}{c(N)} e^{-\text{tr}M^\dagger M / 2\sigma^2}, \quad c(N) = 2^{N/2} \pi^{N^2/2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(N) \equiv N \times N \text{ エルミート行列全体の空間} &\iff N^2 \text{ 次元実空間 } \mathbb{R}^{N^2} \\ \mathcal{H}(N) \text{ の体積要素 } \mathcal{U}(M) &\iff \mathbb{R}^{N^2} \text{ のルベーグ測度 } d^{N^2} x \end{aligned}$$

- $\mathcal{H}(N)$ における「平均 0, 分散 σ^2 の正規分布」の確率密度関数

$$\mu(M) = \frac{\sigma^{-N^2}}{c(N)} e^{-\text{tr}M^\dagger M / 2\sigma^2}$$

比較： \mathbb{R} 上の「平均 0, 分散 σ^2 の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ 」の確率密度関数

$$\mu(x) = p_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} = \frac{\sigma^{-1}}{c(1)} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad c(1) = \sqrt{2\pi}$$

- $U(N) \equiv N \times N$ のユニタリ行列全体の集合
- 任意の $U \in U(N)$ に対して, 確率 $\mu(M)U(dM)$ はユニタリ変換 $M \rightarrow U^\dagger M U$ の下で不変.
- このような不変性を持つ「 $\mathcal{H}(N)$ における正規分布」をランダム行列理論では

ガウス型ユニタリ統計集団

Gaussian Unitary Ensemble (GUE)

$$\text{GUE}_N(0, \sigma^2)$$

という.

- $\mathcal{H}(N) \simeq \mathbb{R}^{N^2}$ ではあるが, $\mathbf{X} \in \text{GUE}_N(0, \sigma^2)$ は行列構造をもっている.
- エルミート値ランダム行列 \mathbf{X}
 \implies 固有値 $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, $\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_N$.
- $\mathbf{X} \sim \text{GUE}_N(0, \sigma^2)$ のとき

$$P(\Lambda_j \in [\lambda_j, \lambda_j + d\lambda], 1 \leq j \leq N) = g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) d^N \lambda,$$

$$g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) = \frac{\sigma^{-N^2}}{C(N)} e^{-|\vec{\lambda}|^2/2\sigma^2} h_N(\vec{\lambda})^2, \quad C(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j).$$

ここで,

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad |\vec{\lambda}|^2 = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2, \quad e^{-|\vec{\lambda}|^2/2\sigma^2} = \prod_{j=1}^N e^{-\lambda_j^2/2\sigma^2},$$

$$\begin{aligned} h_N(\vec{\lambda}) &= \prod_{1 \leq j < k \leq N} (\lambda_k - \lambda_j) && \text{差積} \\ &= \det_{1 \leq j, k \leq N} [\lambda_j^{k-1}] && \text{Vandermonde 行列式} \end{aligned}$$

$$P(\Lambda_j \in [\lambda_j, \lambda_j + d\lambda], 1 \leq j \leq N) = g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) d^N \lambda,$$

$$g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) = \frac{\sigma^{-N^2}}{C(N)} e^{-|\vec{\lambda}|^2/2\sigma^2} h_N(\vec{\lambda})^2, \quad C(N) = (2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N \Gamma(j).$$

- すべての対 $(j, k), 1 \leq j < k \leq N$ に対して

$$|\lambda_k - \lambda_j| \searrow 0 \implies h_N(\vec{\lambda}) \searrow 0 \implies \text{出現確率密度 } g_{\sigma^2}^{\text{GUE}}(\vec{\lambda}) \searrow 0.$$

- つまり、任意の2つの固有値は、近い値を取りにくい。
- 実軸 \mathbb{R} 上の固有値 $\{\lambda_j\}$ の分布は独立ではなく、互いに斥力が働いている。
(パウリの排他律. フェルミオン系)

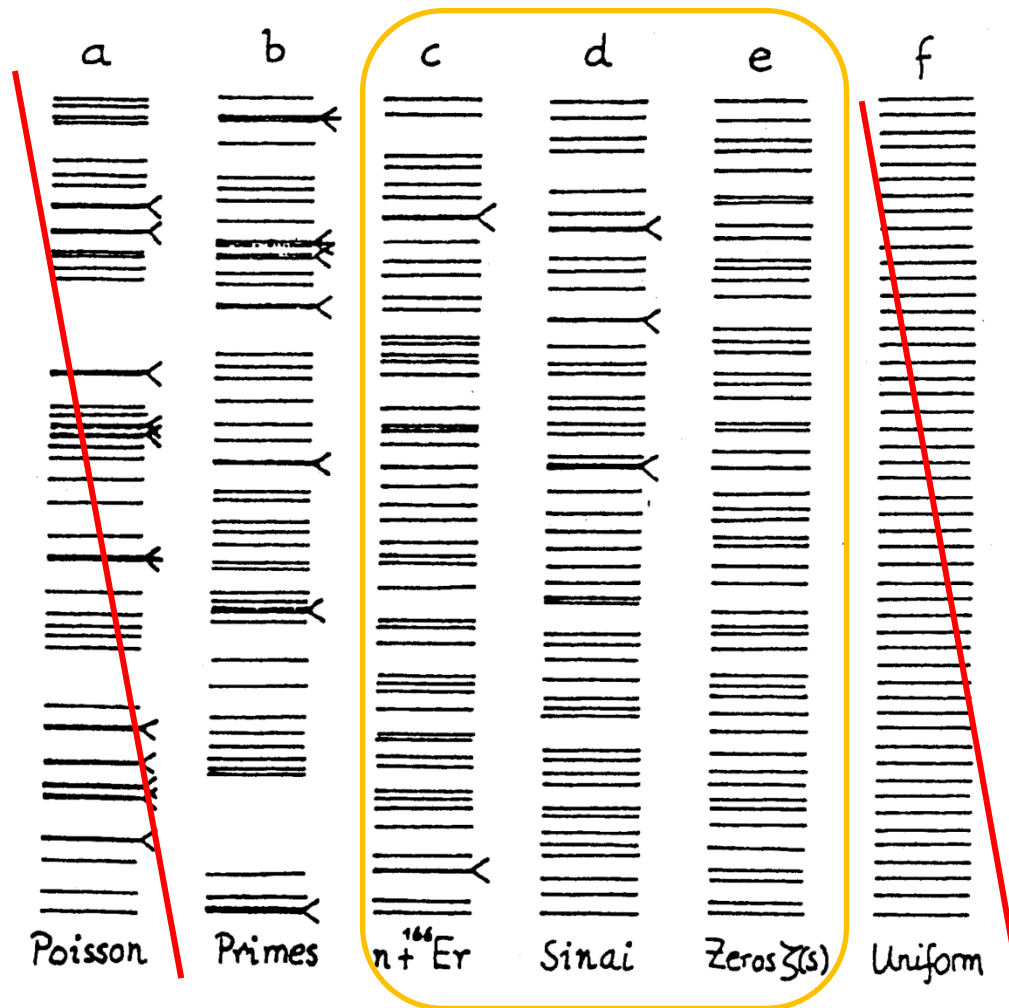


Figure 1.2. Some typical level sequences. From Bohigas and Giannoni (1984). (a) Random levels with no correlations, Poisson series. (b) Sequence of prime numbers. (c) Slow neutron resonance levels of the erbium 166 nucleus. (d) Possible energy levels of a particle free to move inside the area bounded by $1/8$ of a square and a circular arc whose center is the mid point of the square; i.e. the area specified by the inequalities, $y \geq 0$, $x \geq y$, $x \leq 1$, and $x^2 + y^2 \geq r$. (Sinai's billiard table.) (e) The zeros of the Riemann zeta function on the line $\text{Re } z = 1/2$. (f) A sequence of equally spaced levels (Bohigas and Giannoni, 1984).