

ダイナミカルなランダム行列と 棲み分けの問題 (part 2/3)

かとり まこと

香取眞理 (中央大学)

生命ダイナミクスの数理とその応用
理論からのさらなる深化


東京大学大学院数理科学研究科

2015年12月9日～11日

2.2 一般の初期配置非衝突BMと ダイナミカルなランダム行列模型

$$p_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} q_N(t, \mathbf{y} | \mathbf{x})$$

$\text{GUE}_N(0, \sigma^2) \cdots N \times N$ エルミート行列の空間 $\mathcal{H}(N)$ における正規分布



$\sigma^2 = t$ として, t を時間変数とせよ : $t \in [0, \infty)$

$N \times N$ エルミート行列の空間 $\mathcal{H}(N)$ の中のブラウン運動

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t/2) + i\tilde{B}_{12}(t/2) & B_{13}(t/2) + i\tilde{B}_{13}(t/2) & \cdots & B_{1N}(t/2) + i\tilde{B}_{1N}(t/2) \\ B_{12}(t/2) - i\tilde{B}_{12}(t/2) & B_{22}(t) & B_{23}(t/2) + i\tilde{B}_{23}(t/2) & \cdots & B_{2N}(t/2) + i\tilde{B}_{2N}(t/2) \\ B_{13}(t/2) - i\tilde{B}_{13}(t/2) & B_{23}(t) - i\tilde{B}_{23}(t/2) & B_{33}(t) & \cdots & B_{3N}(t/2) + i\tilde{B}_{3N}(t/2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{1N}(t/2) - i\tilde{B}_{1N}(t/2) & B_{2N}(t/2) - i\tilde{B}_{2N}(t/2) & B_{3N}(t/2) - i\tilde{B}_{3N}(t/2) & \cdots & B_{NN}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
B_{jj}(t), 1 \leq j \leq N & N \text{ 個} \\
B_{jk}(t), 1 \leq j < k \leq N & N(N-1)/2 \text{ 個} \\
\tilde{B}_{jk}(t), 1 \leq j < k \leq N & N(N-1)/2 \text{ 個}
\end{array}
\quad \left(+ \right)$$

$$N^2 \text{ 個}$$

N^2 個の独立な標準ブラウン運動 (原点からスタート, 時刻 $t > 0$ での分散 $\sigma^2 = t$.)

$B(t), t \geq 0$: $\mathcal{H}(N)$ の空間中のブラウン運動
 $N \times N$ エルミート行列に値をもつブラウン運動

$$\mathcal{H}(N) \simeq \mathbb{R}^{N^2}$$

$$\mathbf{B}(t) \simeq N^2 \text{次元ブラウン運動}$$

しかし, $\mathbf{B}(t), t \geq 0$ はエルミート行列値 $\implies N$ 個の実固有値をもつ.

- 固有値確率過程

$$\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)), \quad t \geq 0.$$

- 定義より, $X_j(t)$ は N^2 個の独立なブラウン運動からなる $\mathbf{B}(t)$ の汎関数

$$X_j(t) = F_j(\mathbf{B}(t)), \quad 1 \leq j \leq N.$$

- 伊藤の公式より, $\vec{X}(t)$ の各成分は次の**確率微分方程式 (SDE)** を満たすことが導ける.
(N 連立 SDE)

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} \frac{dt}{X_j(t) - X_k(t)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0.$$

ただし, $B_j(t), 1 \leq j \leq N$ は上の $\mathbf{B}(t)$ の成分に現れた $B_{ij}(t)$ とは別もの.
 N 個の独立な1次元標準ブラウン運動である.

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} \frac{dt}{X_j(t) - X_k(t)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0.$$

- この SDE 系は**ダイソン模型**とよばれる。
より正確には, Dyson's Brownian motion model の $\beta = 2$ の場合
(GUE の場合, \mathbb{C} の場合, A 型の場合)
- すべての粒子間に粒子間距離に反比例する斥力が働く。
- 長距離相互作用 (べき乗型) をもつ「相互作用ブラウン粒子系」
(Interacting Brownian motions)

- **ダイソン模型** $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)), t \geq 0$ の SDEs

$$dX_j(t) = dB_j(t) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq N, \\ k \neq j}} \frac{dt}{X_j(t) - X_k(t)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad t \geq 0.$$

- このダイソン模型 (N 粒子確率過程) の時刻 $s \rightarrow t$ の間の $\mathbf{x} \in \mathbb{W}_N \rightarrow \mathbf{y} \in \mathbb{W}_N$ の推移確率密度を $p_N^{\text{Dyson}}(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x})$ と書くことにする。これは次の偏微分方程式を満たす。(後進 Kolmogorov 方程式という.)

$$\frac{\partial}{\partial t} p_N^{\text{Dyson}}(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta^{(N)} p_N^{\text{Dyson}}(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) + \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq N, \\ j \neq k}} \frac{1}{x_j - x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} p_N^{\text{Dyson}}(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}).$$

初期条件 $\lim_{t \downarrow s} p_N^{\text{Dyson}}(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^N \delta(y_j - x_j).$

- この解は

$$\begin{aligned} p_N^{\text{Dyson}}(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) &= \frac{h_N(\mathbf{y})}{h_N(\mathbf{x})} q_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} \in \mathbb{W}_N \text{ スタートの非衝突 BM の推移確率 } p_N(t-s, \mathbf{y}|\mathbf{x}) \end{aligned}$$

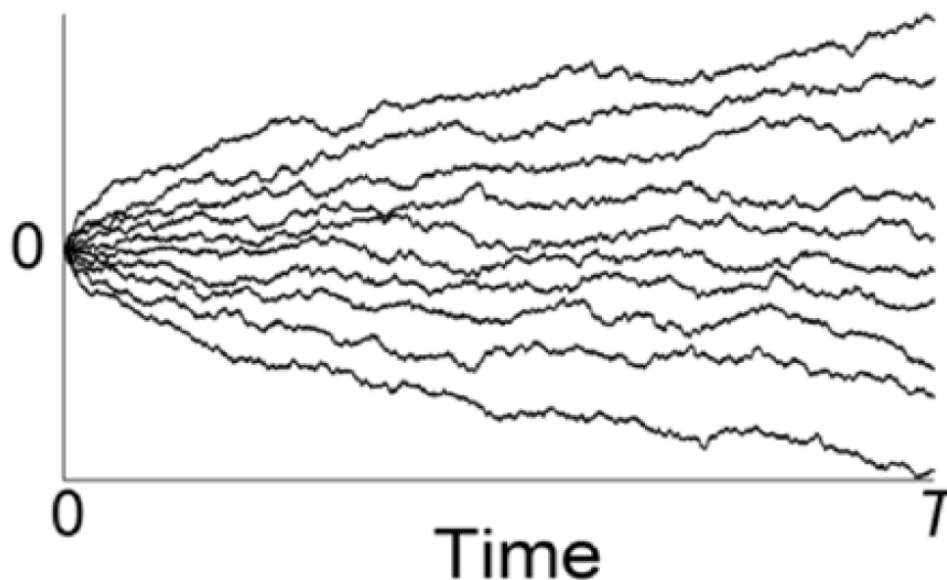
Theorem 2.1

ダイソン模型(ダイナミカルなランダム行列模型)



確率過程として等価である

非衝突ブラウン運動(動的な棲み分けの確率過程モデル)



3. ダイナミカルな行列モデルが描く 時空平面上的な非衝突経路のパターン

非衝突BM \Rightarrow 非衝突拡散過程

- 非衝突条件を課したシミュレーションは一般に難しい
(衝突したらやり直し...)
- ダイナミカルな行列モデル(行列値拡散過程)の固有値の計算は難しくない

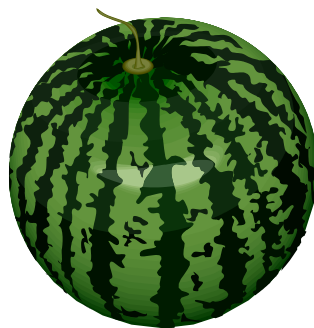
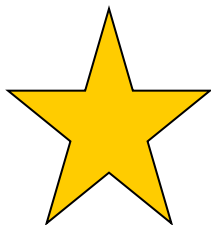
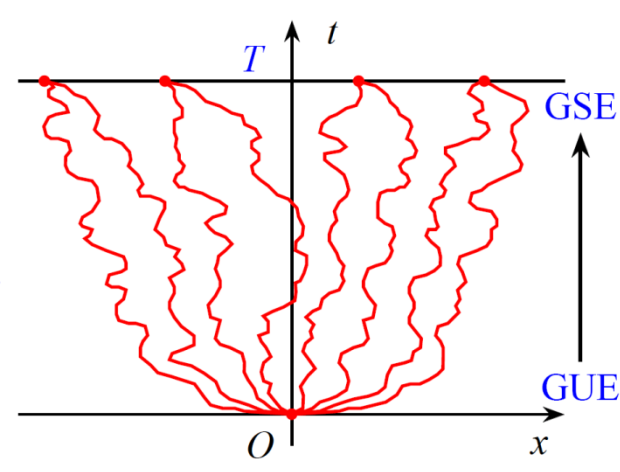
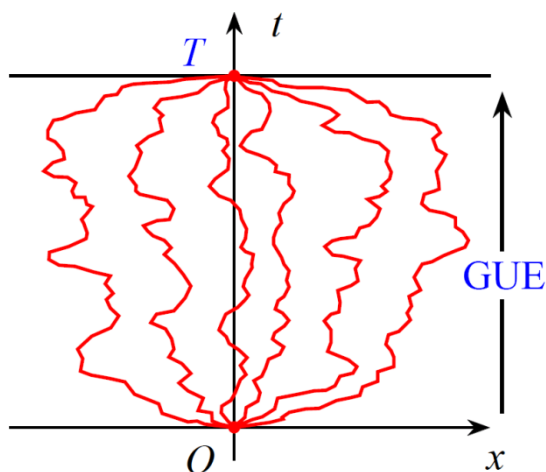
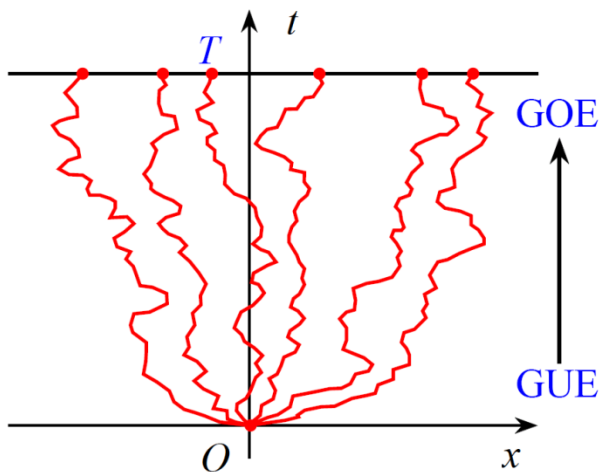
非衝突拡散過程の経路

(空間1次元+時間1次元の)時空平面上的なパターンを描く

- ダイナミカルな行列モデルの対称性を変化させる
 \Rightarrow 様々なパターンを実現することが出来る.

非衝突ランダム曲線 (directed polymers) のトポロジー

⇔ ランダム行列の対称性の転移 (two-matrix models)

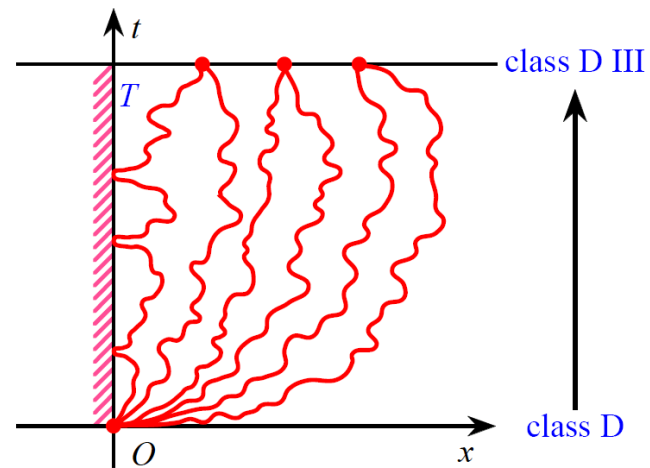
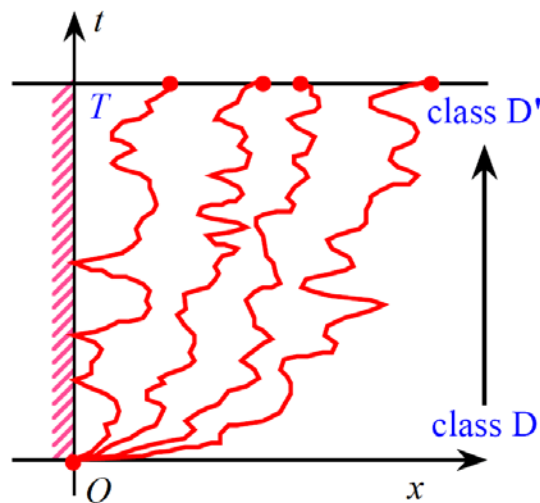
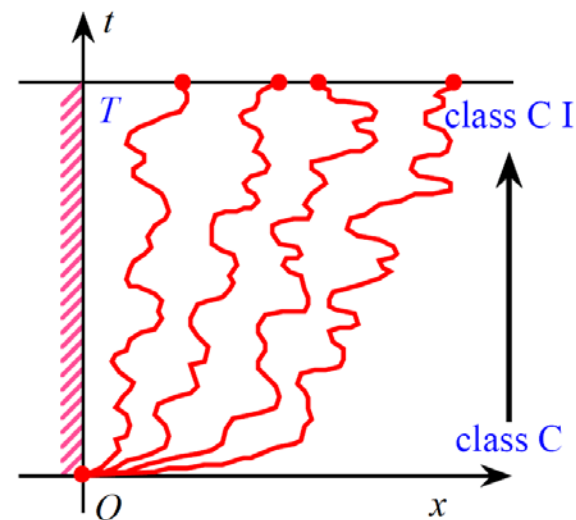


非衝突ランダム曲線 (directed polymers) のトポロジー

⇔ ランダム行列の対称性の転移 (two-matrix models)

壁付き (吸収壁、反射壁)

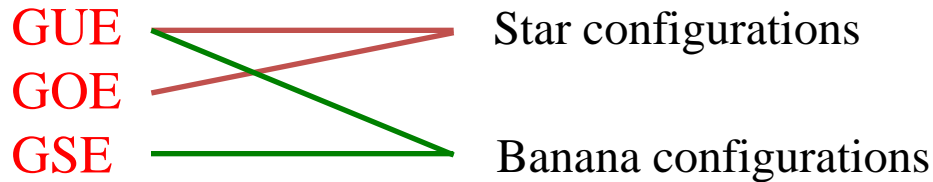
••• Bogoliubov-de Gennes class (Altland-Zirnbauer)



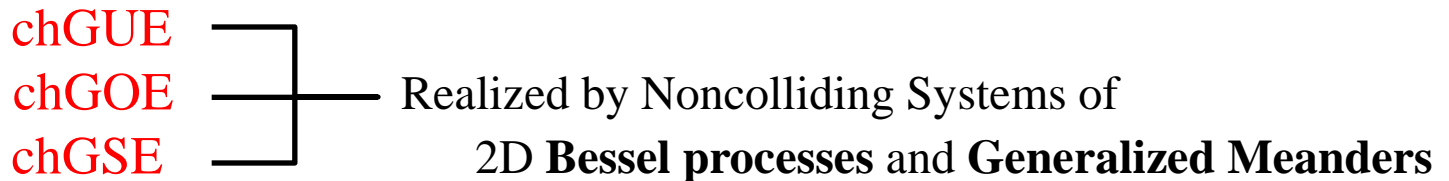
Vicious Walks/Random Matrix 対応

- There are **10 CLASSES** of Gaussian Random Matrix Theories.

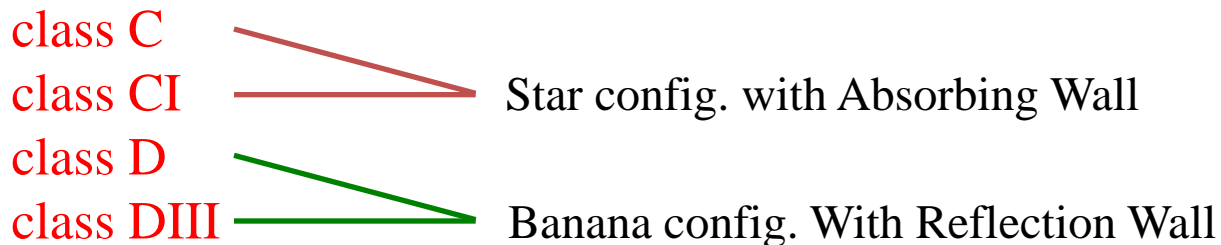
Standard (Wigner-Dyson)



Nonstandard (chiral random matrices) Particle Physics of QCD



Nonstandard (Altland-Zirnbauer) Mesoscopic Physics with Superconductivity



All of the 10 eigenvalue-distributions can be realized by the Noncolliding Diffusion Particle Systems (Vicious Walks).

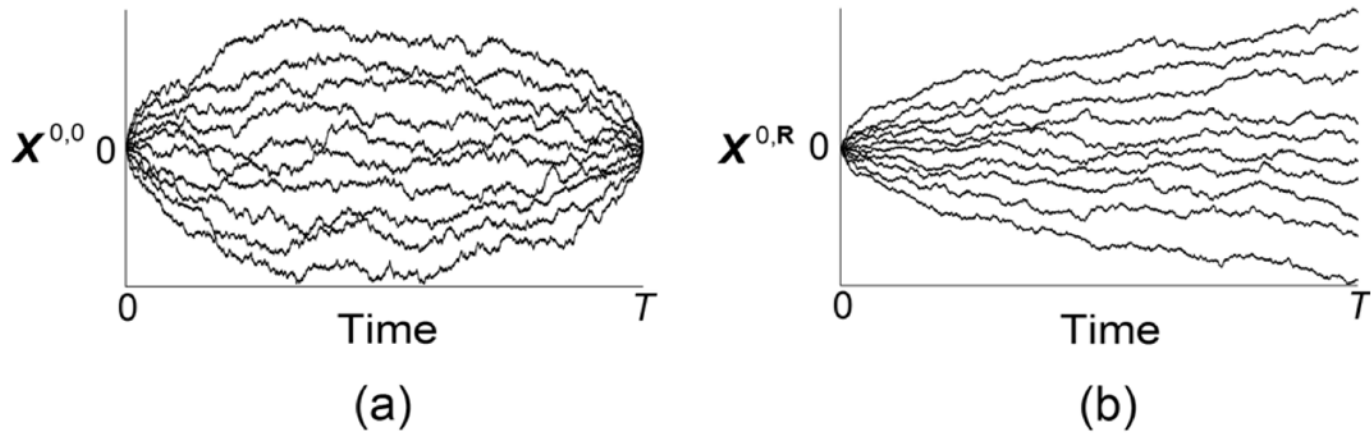


Figure 1. Samples of paths for (a) $X^{0,0}(t)$ and (b) $X^{0,\mathbb{R}}(t)$, $t \in [0, T]$, generated by simulating the corresponding eigenvalue processes of random-matrix models.

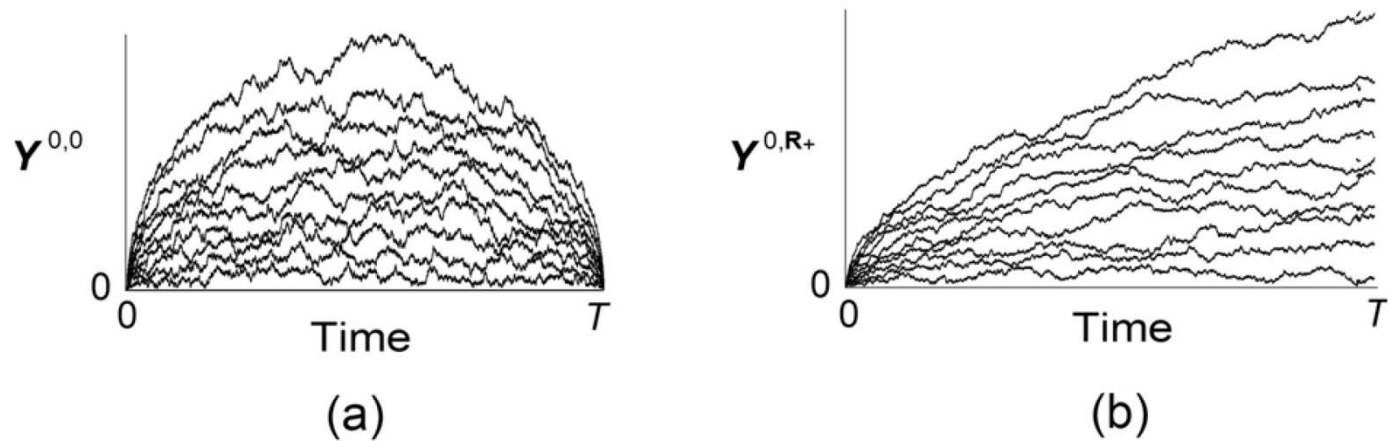
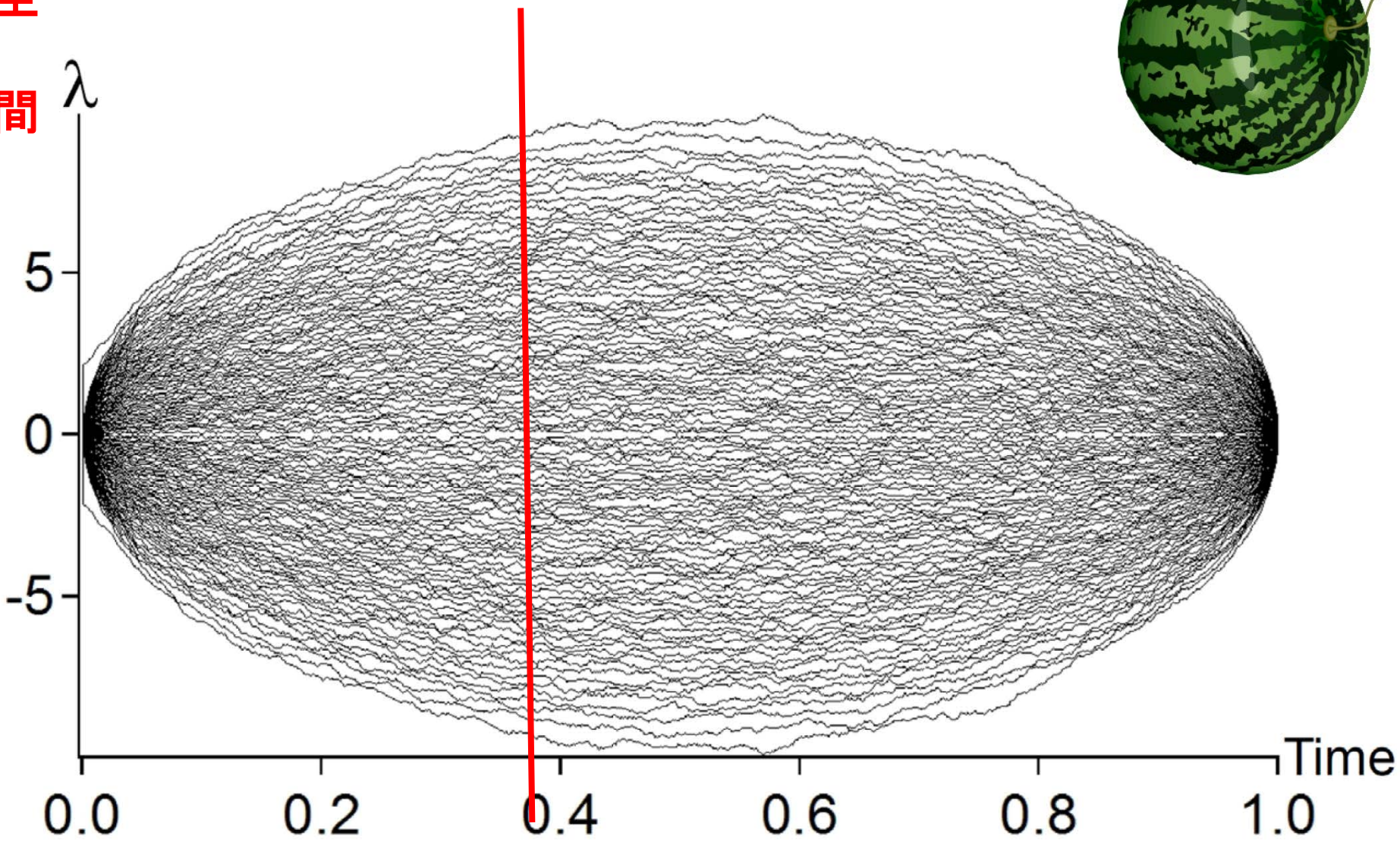


Figure 2. Samples of paths for (a) $Y^{0,0}(t)$ and (b) $Y^{0,\mathbb{R}+}(t)$, $t \in [0, T]$.

空間

λ



時間

Theorem 3.1 (Wigner の半円則)

$N \rightarrow \infty$ の極限で、各時刻 $t > 0$ ごとに粒子密度関数 $\rho(t, x)$ は次のように与えられる。

$$\rho(t, x) \simeq \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{2t}} \sqrt{2N - \frac{x^2}{2t}}, & \text{if } -2\sqrt{Nt} \leq x \leq 2\sqrt{Nt}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 各ブラウン運動の分散は \sqrt{t} .
- N 粒子非衝突BMでは、棲み分けの効果（粒子間斥力）のため $2\sqrt{N}$ 倍される。
- $-2\sqrt{Nt} \leq x \leq 2\sqrt{Nt}$ の範囲に集中し、その外には存在しない。
(有限な support を持った分布則.)

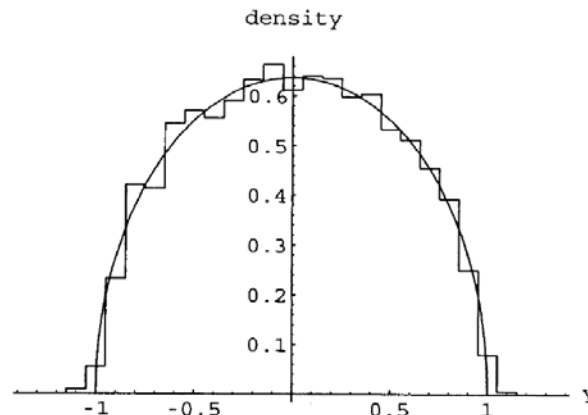
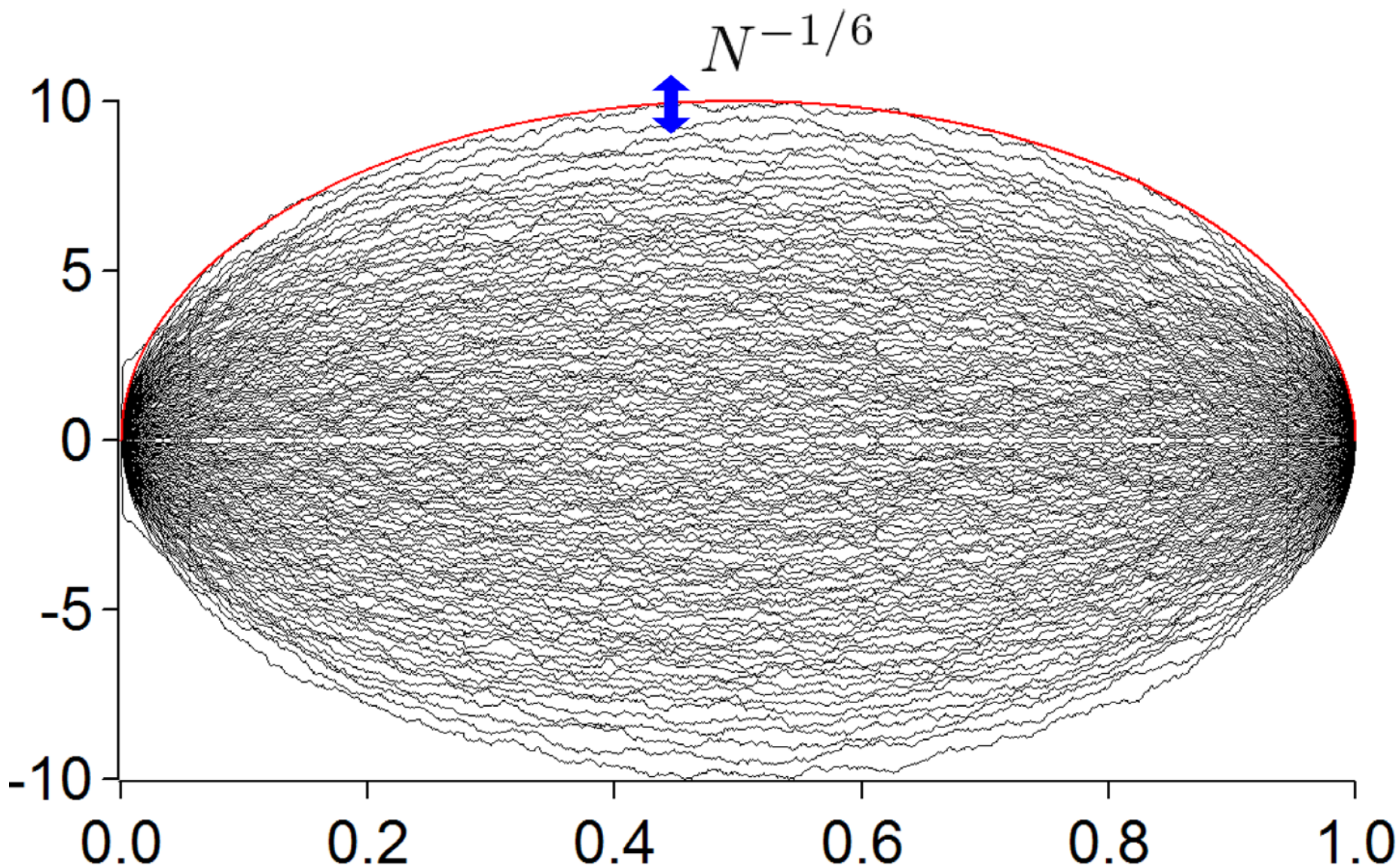


Figure 1.1 Empirical demonstration of the Wigner semicircle law for 10×10 matrices from the GUE.

一番外側の粒子の経路 (soft edge) の揺らぎの分布に着目



Theorem 3.2 (Tracy-Widom 分布)

\mathbb{P}^0 を $\mathbf{0}$ からスタートした非衝突BM $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)), t \geq 0$ の確率測度とする.

(i) 次の極限分布が存在する

$$F_{\text{TW}}(x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}^0 \left[\frac{\max_{1 \leq j \leq N} X_j(t) - 2\sqrt{Nt}}{t^{1/2} N^{-1/6}} < x \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

この分布を **Tracy-Widom 分布** という.

(ii) $F_{\text{TW}}(x)$ は次の表現をもつ.

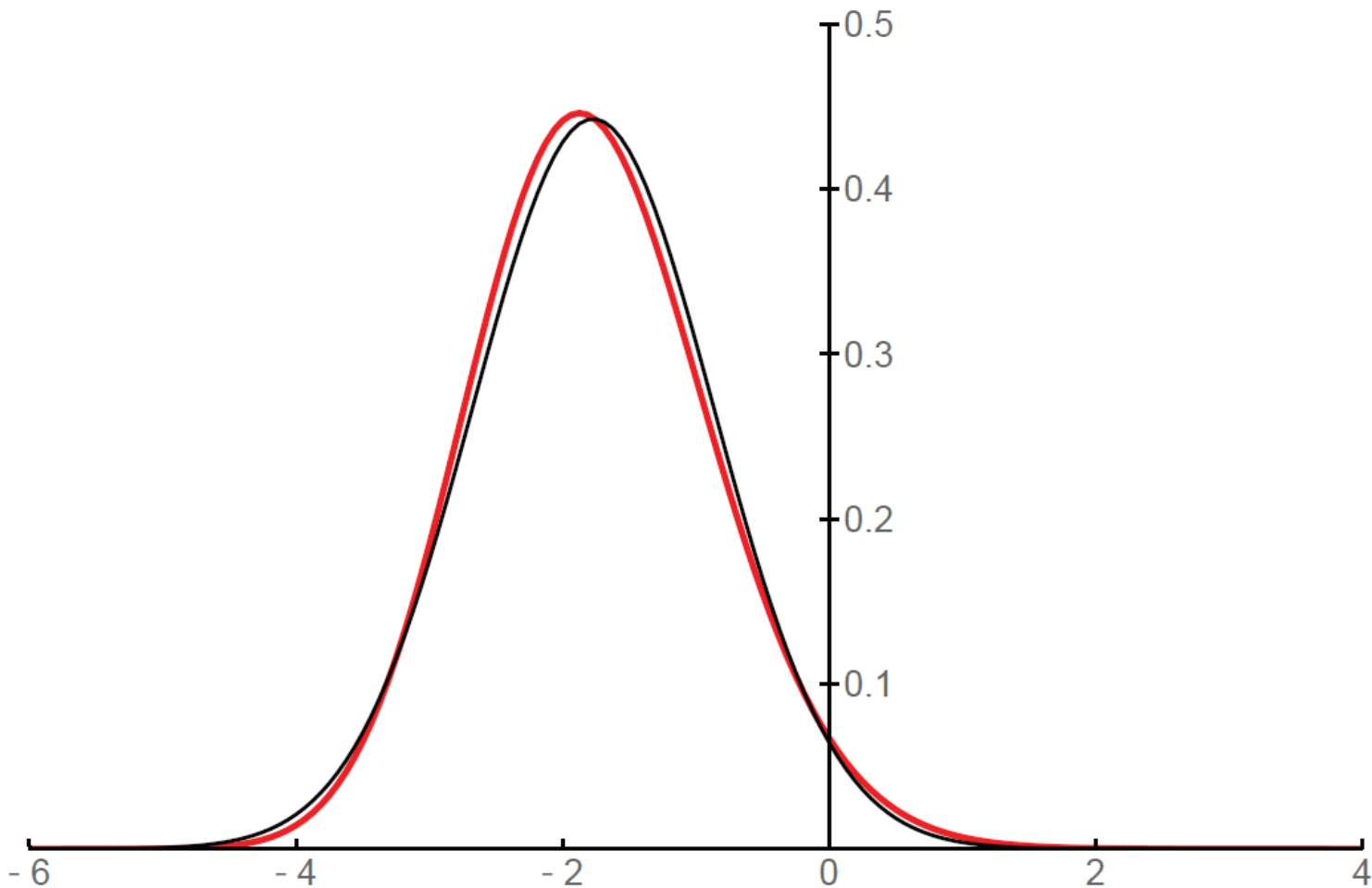
$$F_{\text{TW}}(x) = \exp \left(- \int_x^\infty (u - x) f_{\text{HM}}(u)^2 du \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ここで, $f_{\text{HM}}(u)$ は, Painlevé II 方程式

$$f''(u) = uf(u) + 2f(u)^3$$

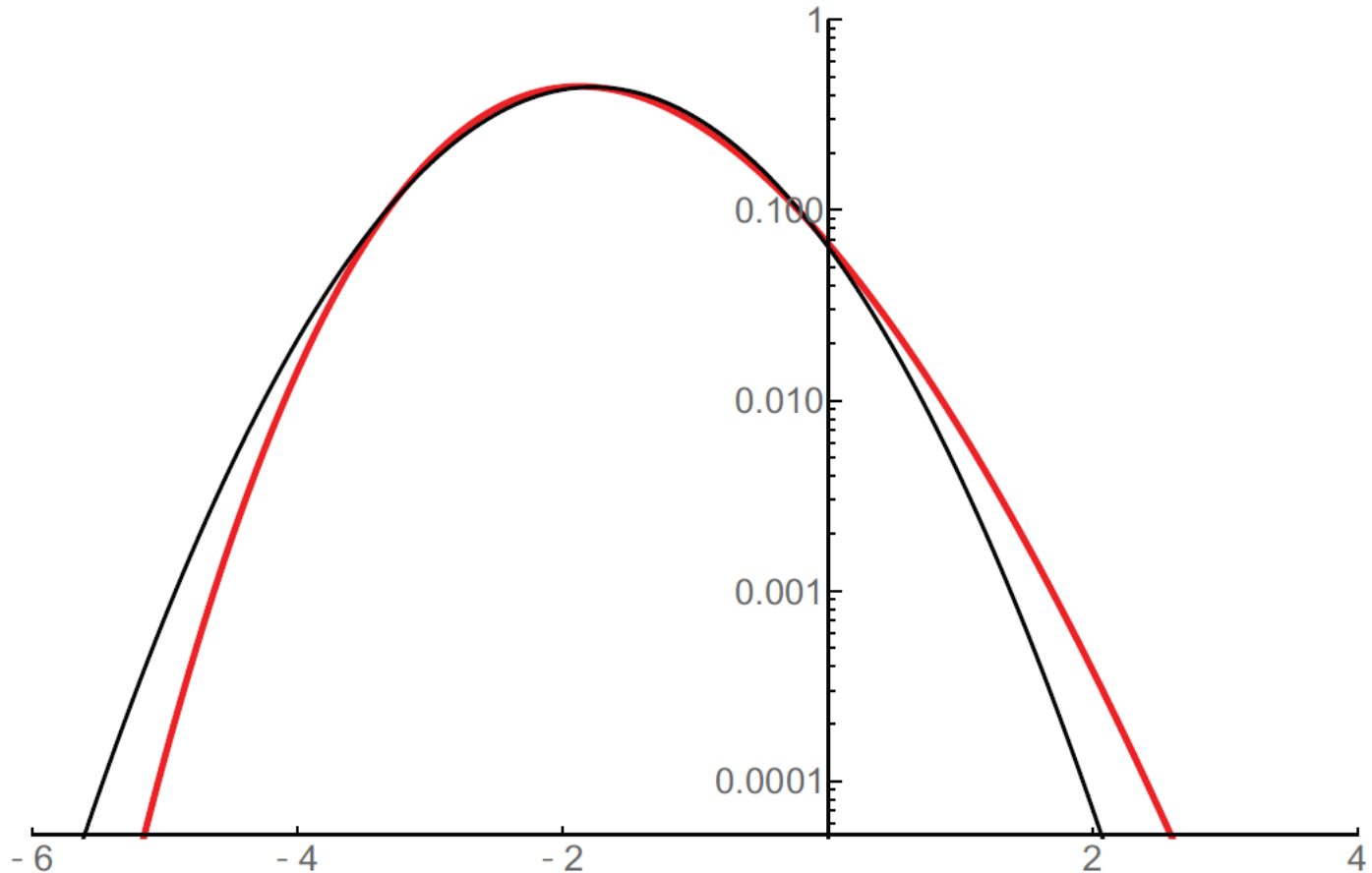
の解で, $u \rightarrow \infty$ で $f(u) \simeq \text{Ai}(u)$ となるものである. $\text{Ai}(x)$ は Airy 関数 $\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \left(\frac{k^3}{3} + kx \right) dk$.

この解は唯一定まり, **Hastings-McLeod 解** とよばれる.



赤曲線: Tracy-Widom 分布

黒曲線: 平均と分散を一致させたガウス分布

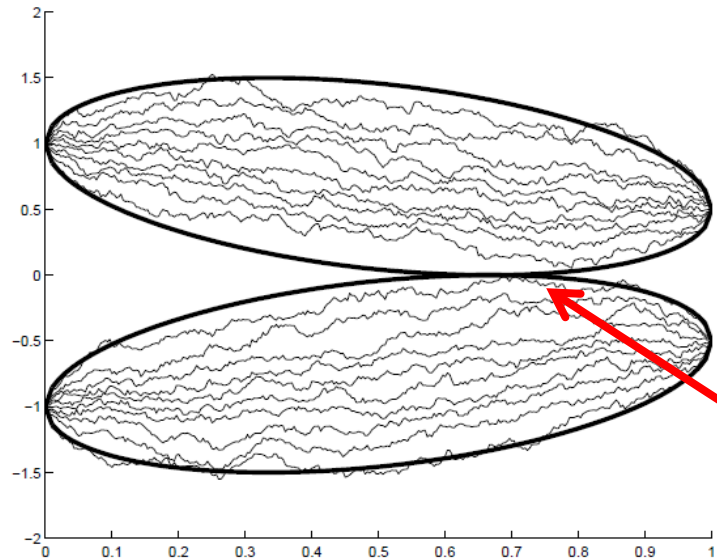
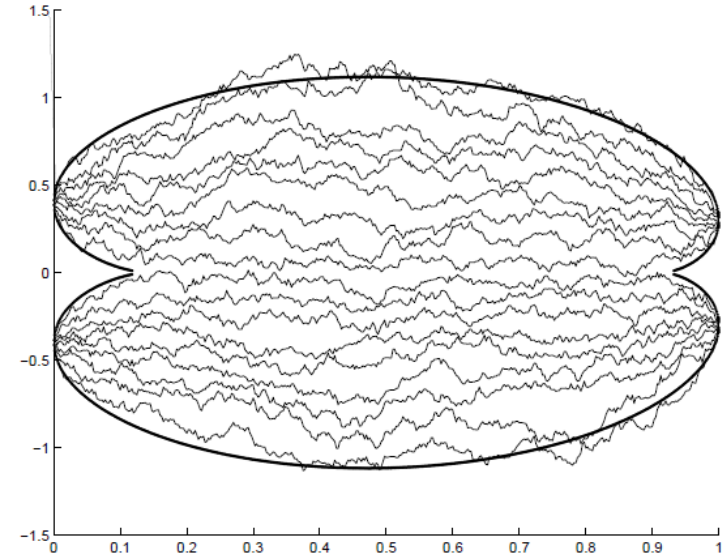
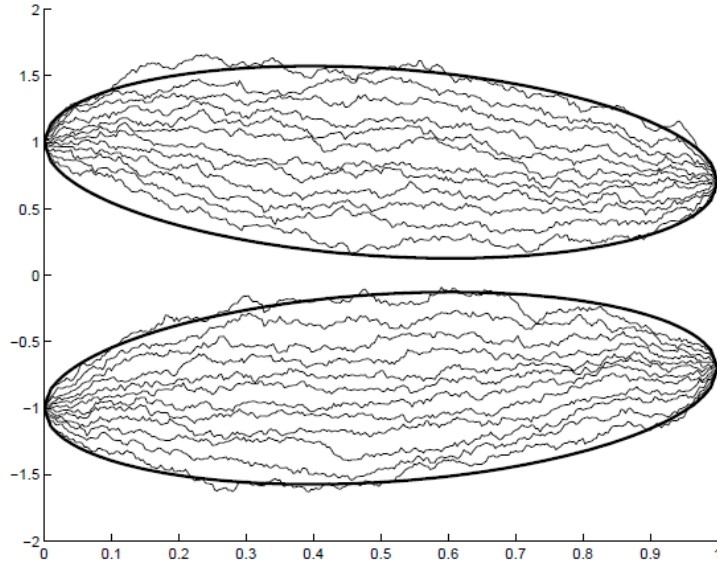


赤曲線: Tracy-Widom 分布

黒曲線: 平均と分散を一致させたガウス分布

片対数プロットすると違いが良く見える.

初期配置(と終配置)を変えると, いろいろなパターンが実現する.
Delvaux, Kuijlaars, Zhang: Commun. Pure Appl. Math. **64** (2011) 1305 より引用



tacnode

空間

時間

4. 無限粒子極限 ($N \rightarrow \infty$) について

非衝突拡散過程 ($\beta = 2$ ダイソン模型のグループ) は強い可積分性 (可解性) をもつ.

- すべての時空相関関数が行列式で与えられる.
- これらの行列式は, 相関核とよばれる 2 時空点関数 $\mathbb{K}(s, x; t, y), (s, x), (t, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ でコントロールされる.
- このような多粒子拡散過程を行列式過程 (determinantal process) とよぶ.

ここでは, スケールされた 1 粒子相関関数 (粒子数密度) $\tilde{\rho}(t, x), (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ の時間発展に関して紹介する.

P. J. Forrester, J. Grela: arXiv:math-ph/1507.07274

S. Andraus, M.K.: in preparation

- $\mathbf{u} \in \mathbb{W}_N$ からスタートした非衝突BM $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_N(t)), t \geq 0$ の期待値を $\mathbb{E}^{\mathbf{u}}$ と書く.
- テスト関数を $\chi(x), x \in \mathbb{R}$ とする.
1 粒子相関関数 (粒子数密度) $\rho_N^{\mathbf{u}}(t, x)$ は次で定義される.

$$\mathbb{E}^{\mathbf{u}} \left[\int_{\mathbb{R}} \chi(x) \sum_{j=1}^N \delta_{X_j(t)}(x) dx \right] = \int_{\mathbb{R}} \chi(x) \rho_N^{\mathbf{u}}(t, x) dx.$$

- スケールされた粒子密度関数 $\widehat{\rho}^{\xi}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} \widehat{\rho}^{\xi}(t, x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \rho_N^{\mathbf{u}} \left(\frac{t}{N}, x \right), \\ \xi &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{u_j}. \end{aligned}$$

- Hilbert 変換

$$\mathcal{H}[f](t, x) = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int \frac{f(t, y)}{x - y} dy = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \int_{-1/\varepsilon}^{-\varepsilon+x} + \int_{x+\varepsilon}^{1/\varepsilon} \right\} \frac{f(t, y)}{x - y} dy.$$

- $\hat{\rho}^\xi(t, x)$ は次の方程式 (流体力学的方程式) に従う.

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}^\xi(t, x) + \pi \frac{\partial}{\partial x} \{ \hat{\rho}^\xi(t, x) \mathcal{H}[\hat{\rho}^\xi](t, x) \} = 0, \quad \hat{\rho}^\xi(0, x) = \xi(x).$$

- グリーン関数の導入 : $G^\xi(t, z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\rho}^\xi(t, y)}{z - y} dy, z \in \mathbb{H} \equiv \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}.$

- G^ξ は次の関数方程式に従う. $G^\xi(t, z) = G^\xi(0, z - tG(t, z)), t \geq 0, z \in \mathbb{H}.$

- $\hat{\rho}^\xi$ は次式で求められる. $\hat{\rho}^\xi(t, x) = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \Im G(t, x + i\varepsilon).$

Examples

$$[1] \quad \xi(x) = \widehat{\rho}^\xi(0, x) = \delta(x). \quad \rightarrow \quad G^\xi(t, z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4t}}{2t}$$

Wigner の半円則

$$\widehat{\rho}^\xi(t, x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2t}} \sqrt{2 - \frac{x^2}{2t}} \mathbf{1}_{(|x| \leq 2\sqrt{t})}.$$

$$[2] \quad \xi(x) = \widehat{\rho}^\xi(0, x) = \frac{1}{2} \{ \delta(x - a) + \delta(x + a) \}, \quad a > 0.$$

