

可換砂山模型の数理

Mathematical Aspects of
the Abelian Sandpile Models

香取眞理(中大理工)

Katori, Makoto (Chuo University)

part 1/3

日本物理学会 2015年秋季大会

19aCX 領域 11, 6, 12 合同シンポジウム

塑性固体のダイナミクス: その非線形応答, なだれとレオロジー

2015年9月19日

関西大学千里山キャンパス

目次:

1. 可換砂山模型(ASM)の定義と基本的な性質
2. 可換砂山模型(ASM)と離散ポアソン方程式
3. 再帰的配置と全域木(spanning tree)との
1対1対応
4. 砂山(ASP)-全域木(spanning tree)の
局所-大域双対性
5. 可換砂山模型(ASM)研究が教えること

1. 可換砂山模型 (Abelian Sandpile Model: ASM) の定義と基本的な性質

1.1 「格子上のモデル」というよりは 「グラフそのもので与えられる」閾値ダイナミクス (toppling: 転倒)が基礎

- 離散モデル

空間：グラフの格子点 $\mathbf{z} \in \Lambda$ 上に変数を置く（以下説明）。

時間： $t \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ （これは次節 1.2 で説明）。

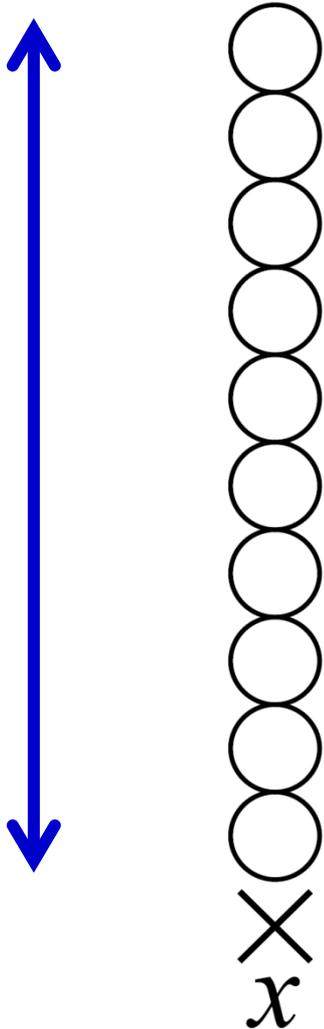
変数：砂山の高さ $\eta_t(\mathbf{z}) \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$ （これは以下説明）。

(1) まず 1 つの点 \mathbf{x} に注目する. 図では \times 印で表した.

\times
 x

(2) その上に砂粒 (砂山の単位 : a grain of sand) をいくつか重ねる.

重ねた砂粒の数 = 砂山の高さ = $\eta_t(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$

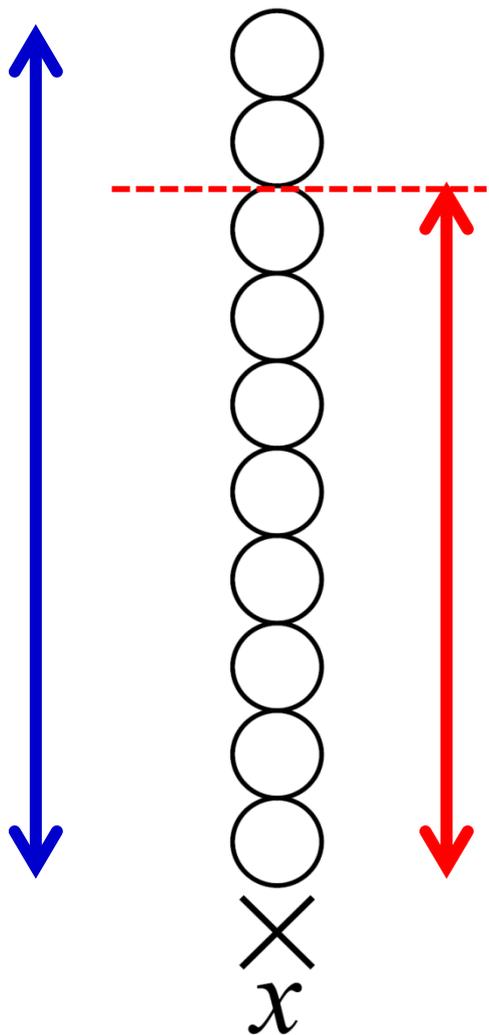


$\eta_t(\mathbf{x}) = 10$ の場合

(3) この点 \mathbf{x} における砂山の安定な高さの閾値 $h_c(\mathbf{x}) \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$ を定める.

$\eta_t(\mathbf{x}) < h_c(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \mathbf{x}$ 上の砂山は安定

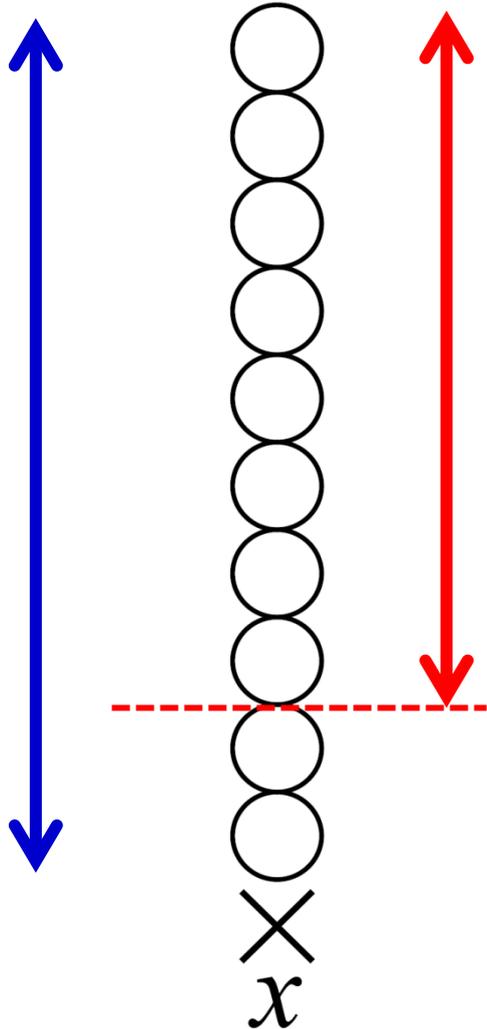
$\eta_t(\mathbf{x}) \geq h_c(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \mathbf{x}$ 上の砂山は不安定



ここでは $h_c(\mathbf{x}) = 8$ とした.

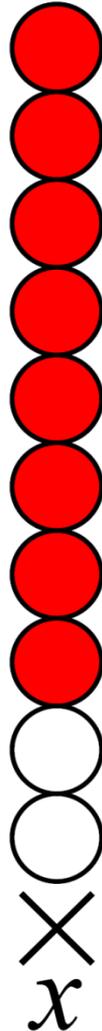
$\eta_t(\mathbf{x}) = 10 \geq 8 = h_c(\mathbf{x})$ なので,
この砂山は不安定である.

- (4) $\eta_t(\mathbf{x}) \geq h_c(\mathbf{x})$ のとき, 砂山は topple (転倒) する.
 $h_c(\mathbf{x})$ は単に閾値を与えるだけでなく,
toppling の際に 周囲に飛び散る砂粒の総数 を指定する.



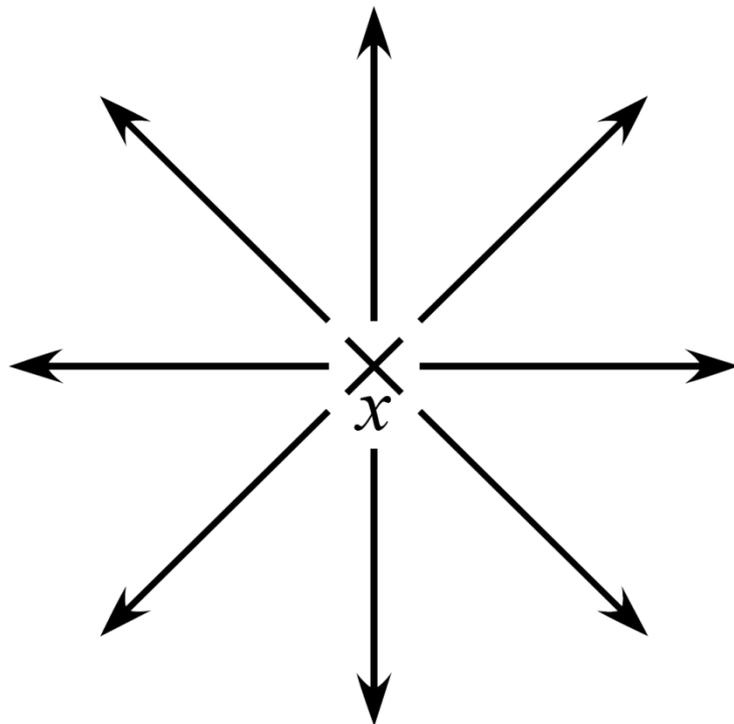
$$\eta_t(\mathbf{x}) = 10 \geq 8 = h_c(\mathbf{x})$$

- (4) $\eta_t(\mathbf{x}) \geq h_c(\mathbf{x})$ のとき, 砂山は topple (転倒) する.
 $h_c(\mathbf{x})$ は単に閾値を与えるだけでなく,
toppling の際に 周囲に飛び散る砂粒の総数 を指定する.

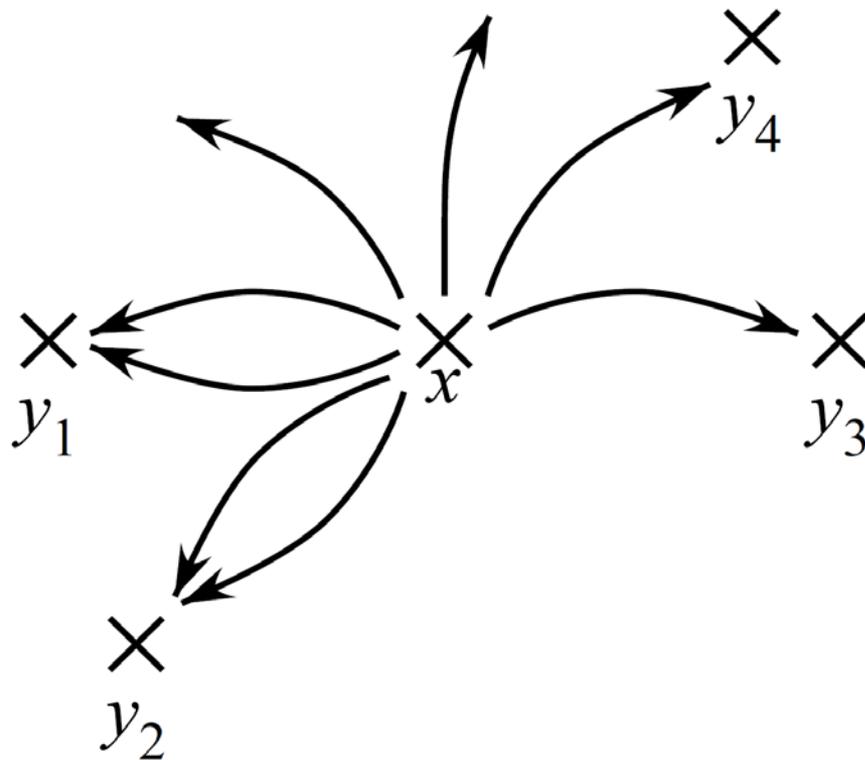


この例では, $\eta_t(\mathbf{x}) = 10$ 個の砂粒のうち
 $h_c(\mathbf{x}) = 8$ 個の砂粒 (赤い砂粒) が topple する.
toppling の後, 点 \mathbf{x} には砂粒は 2 個だけ残る.

- (5) 点 \mathbf{x} から $h_c(\mathbf{x})$ 個の砂粒がどのように飛び散るかを矢印で指定したい.
図の例では, \mathbf{x} を始点とする $h_c(\mathbf{x}) = 8$ 本の矢印を考えることになる.



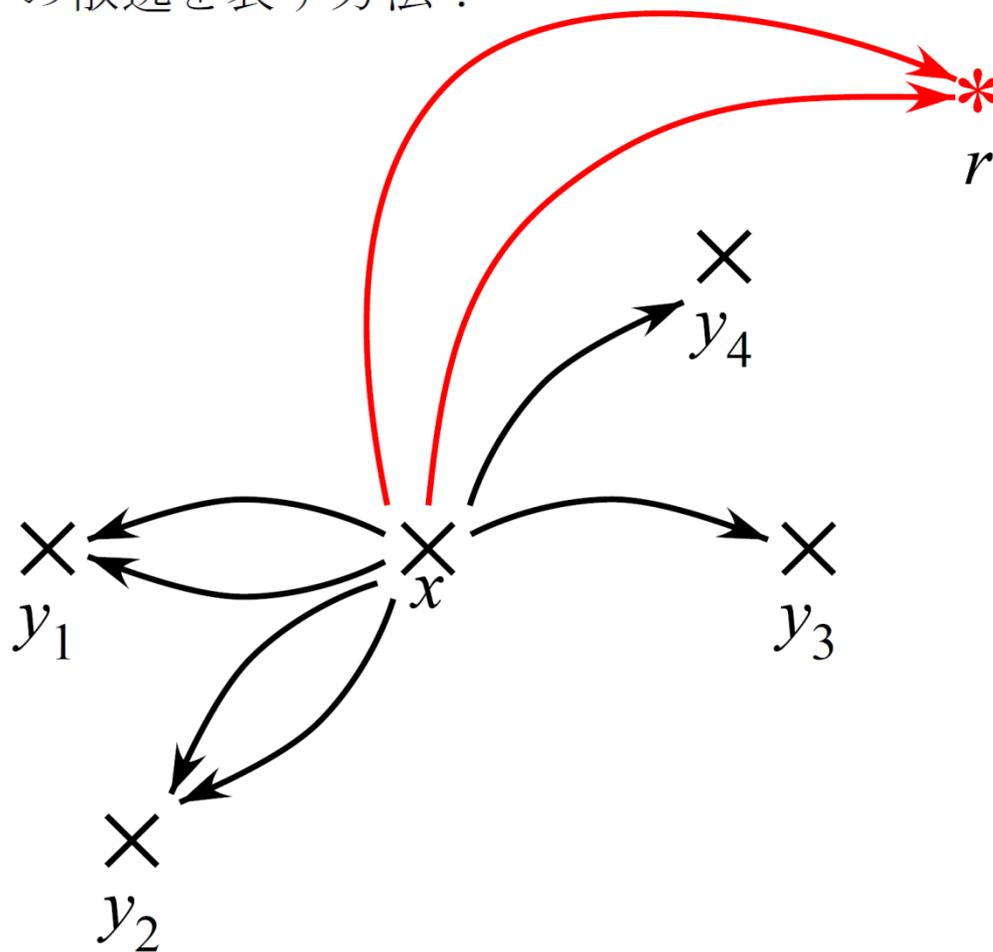
- (5) 点 \mathbf{x} から $h_c(\mathbf{x})$ 個の砂粒がどのように飛び散るかを矢印で指定したい.
図の例では, \mathbf{x} を始点とする $h_c(\mathbf{x}) = 8$ 本の矢印を考えることになる.



矢印の先に

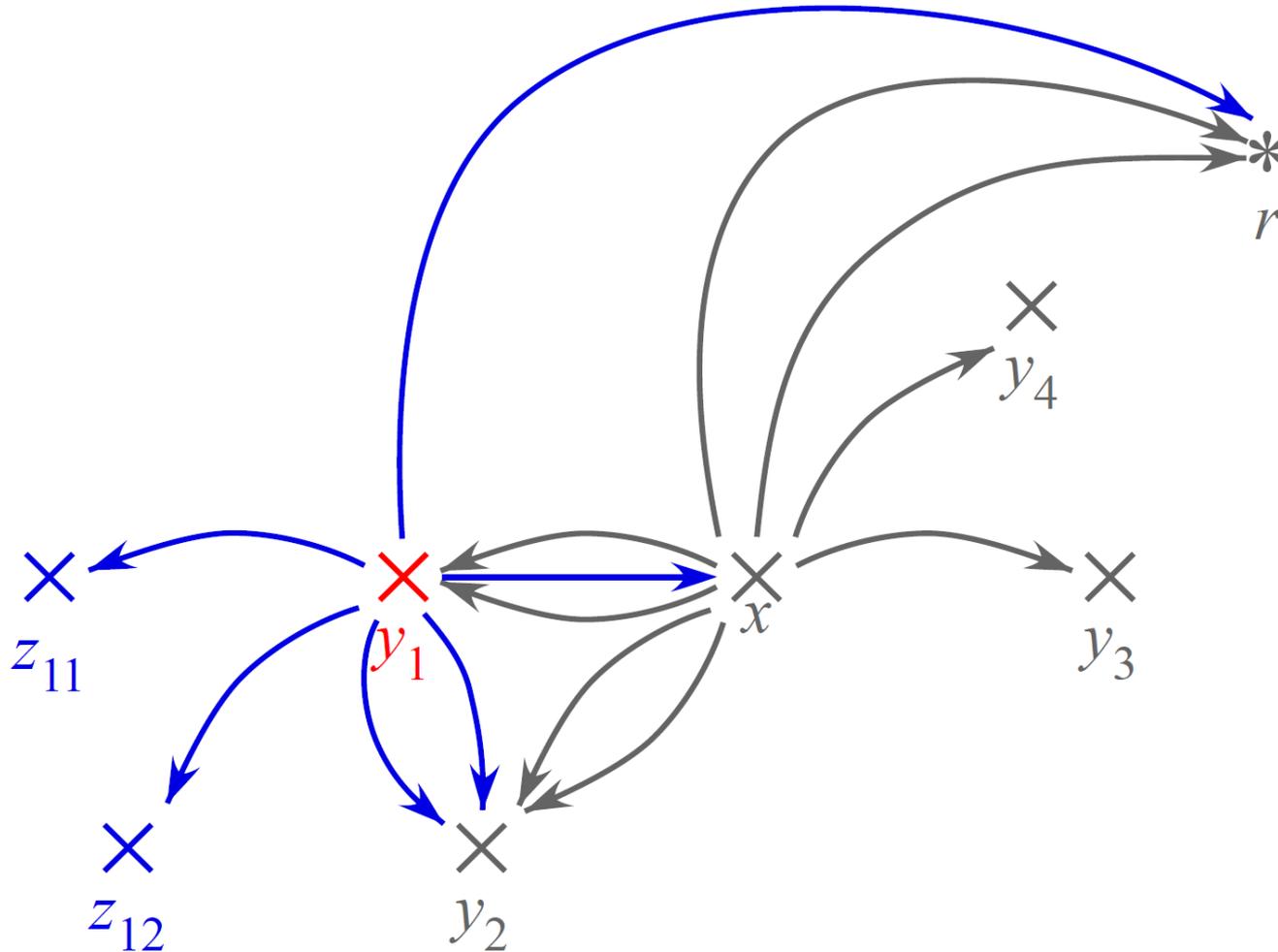
- 格子点がある場合 : $\{y_1, y_2, y_3, y_4\} \subset \Lambda$ 矢印 1 本あたり 1 個の砂粒が $\mathbf{x} \rightarrow y_j$ へ流出する.
この図の例は, 点 \mathbf{x} の周りに 4 つの格子点があってそれらが格子 Λ の一員になっている場合.
- 格子点がない場合 : 格子 Λ の外に散逸してしまうと考える.

(6) 格子 Λ の外への散逸を表す方法：

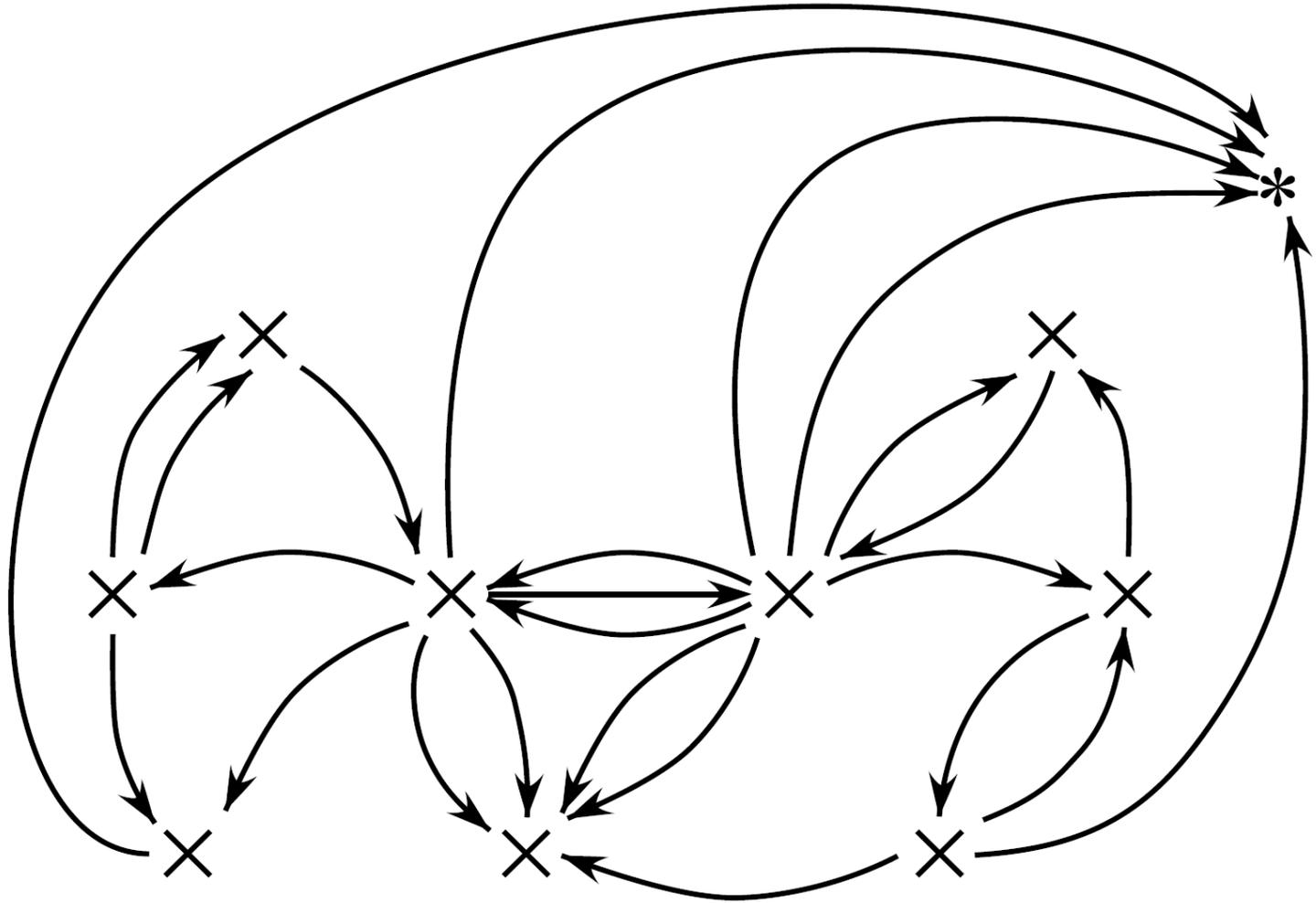


- 付加的な点 \mathbf{r} を考え、そこに移動してしまったとする. (\mathbf{r} は考えている系の「外の世界」を表す.)
- 後で全域木 (spanning tree) との対応を考えるときには、これは根 (root) を表すことになるので \mathbf{r} と書くことにする. 図では $*$ で表す.

- (7) 次に，点 \mathbf{x} の最近接格子点の一つである \mathbf{y}_1 上で同様の設定をする．
 砂山の安定閾値 $h_c(\mathbf{y}_1)$ を定める．図の例では $h_c(\mathbf{y}_1) = 6$ である．
 よって， $h_c(\mathbf{y}_1) = 6$ 本の矢印を \mathbf{y}_1 から放出させる．
 これらの矢印の終点についての情報を指定する (Λ 中の格子点か \mathbf{r} かを定める) ．



- (8) この操作を Λ に含まれる格子点（下図の場合，9つの×印）すべてについて行う．すると，下図のような有向グラフ $G = (V, E)$ が得られる．

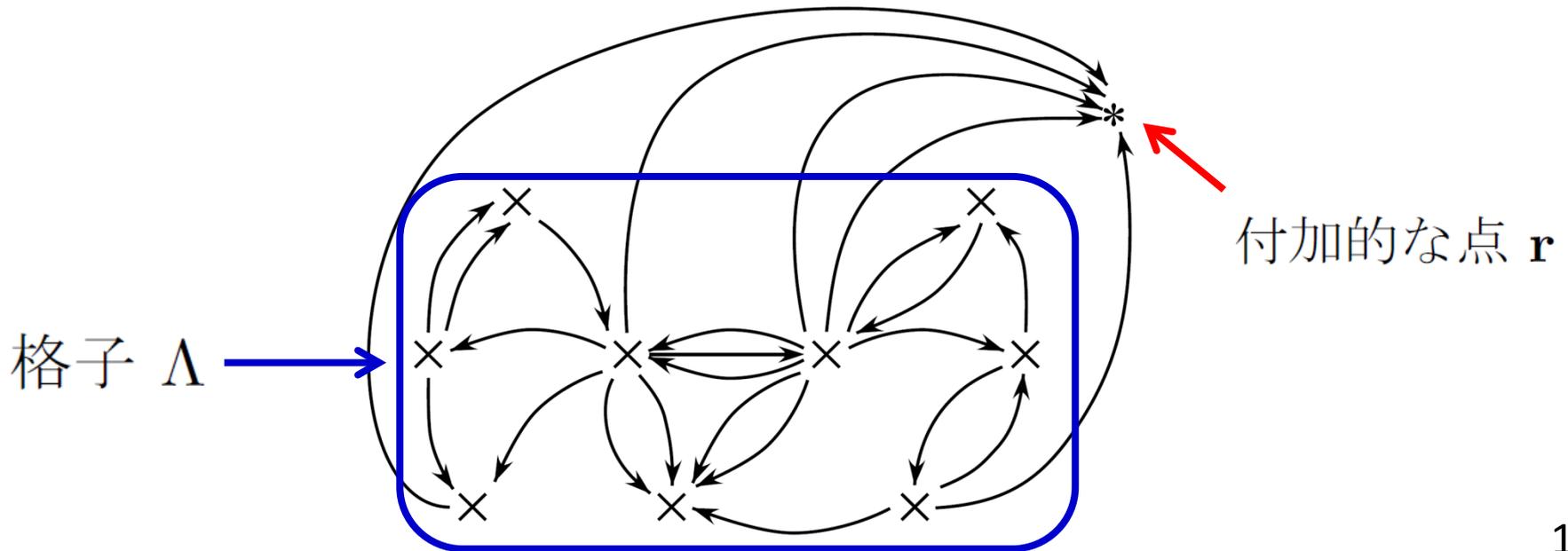


(8) この操作を Λ に含まれる格子点 (下図の場合, 9つの×印) すべてについて行う。すると, 下図のような有向グラフ $G = (V, E)$ が得られる。

$$G = (V, E)$$

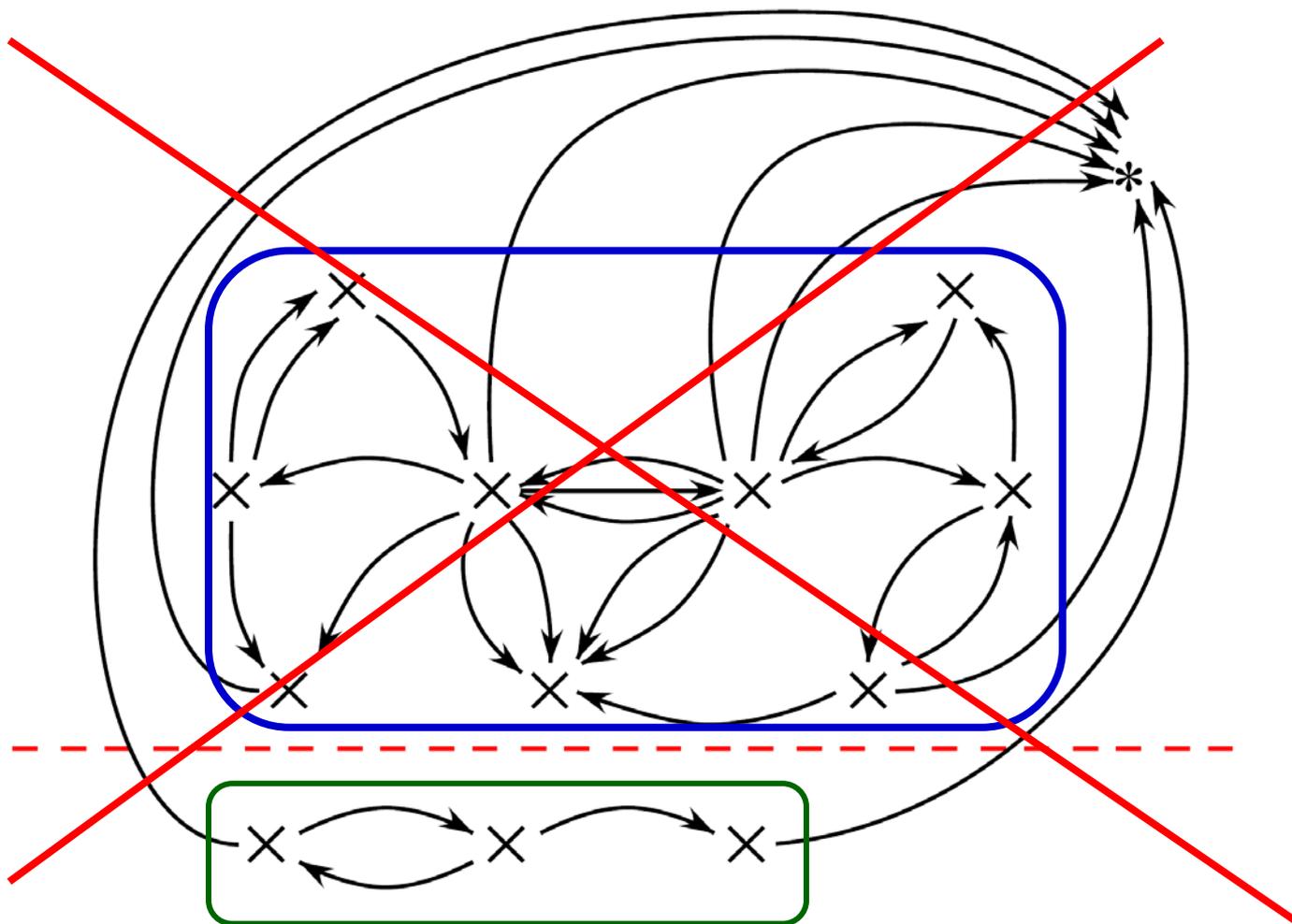
$$V = \text{点 (vertex) の集合} = \begin{cases} \text{元の格子 } \Lambda \text{ の格子点 } \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{z}_{11}, \mathbf{z}_{12}, \dots\} \\ \text{付加的な点 } \mathbf{r} \end{cases}$$

$$E = \text{辺 (edge) の集合} = \begin{cases} \text{格子 } \Lambda \text{ に含まれている格子点同志を結ぶ有向辺} \\ \quad \text{(向きがあることに注意. 一般には両方の向きがある.)} \\ \text{格子点から } \mathbf{r} \text{ への矢印 (散逸を表すので, 逆向きはない)} \end{cases}$$



- (9) 下のグラフは、 r とそこへ至る矢印を除くと 2 つの部分に分かれてしまう (これを reducible という).

ここでは、このような分割はできない場合を考えることにする.
これを irreducible graph とよぶ.



(i) 格子 Λ に含まれる格子点 (×印) の総数を $|\Lambda|$, vertex の集合 V に含まれる点の総数を $|V|$ と記す. 当然, $|V| = |\Lambda| + 1$ である. $+1$ は \mathbf{r} の分である.

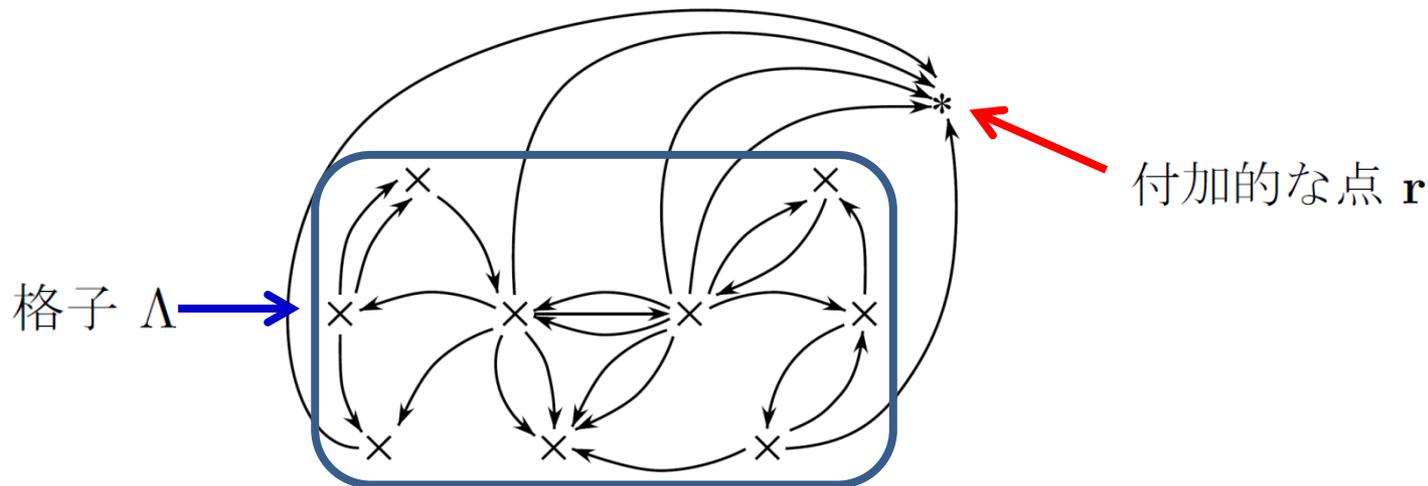
(ii) サイズ $|V| = |\Lambda| + 1$ の実正方行列 Δ_* を考える:

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V = \Lambda \cup \{\mathbf{r}\}$ に対して

$$\begin{cases} \Delta_*(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = h_c(\mathbf{x}) = \text{「}\mathbf{x} \text{ を始点とする矢印の総数」}, & \mathbf{a} = \mathbf{x} \in \Lambda \text{ の場合} \\ = 0, & \mathbf{a} = \mathbf{r} \text{ の場合} \\ -\Delta_*(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{「}\mathbf{a} \text{ を始点とし } \mathbf{b} \text{ を終点とする矢印の本数」}, & \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \text{ の場合} \end{cases}$$

この定義より, $\mathbf{x} \in \Lambda$ に対しては

$$\begin{aligned} \Delta_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \sum_{\substack{\mathbf{y}: \mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \\ \mathbf{y} \in \Lambda}} (-\Delta_*(\mathbf{x}, \mathbf{y})) &= \sum_{\mathbf{y}: \mathbf{y} \in \Lambda} \Delta_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= -\Delta_*(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{x} \text{ 上の砂山の 1 回の toppling で格子 } \Lambda \text{ から散逸してしまう砂粒の総数} \end{aligned}$$



(iii) 上の行列 Δ_* のうち \mathbf{r} の行と列を除いて得られるサイズ $|\Lambda|$ の実正方行列を考える.

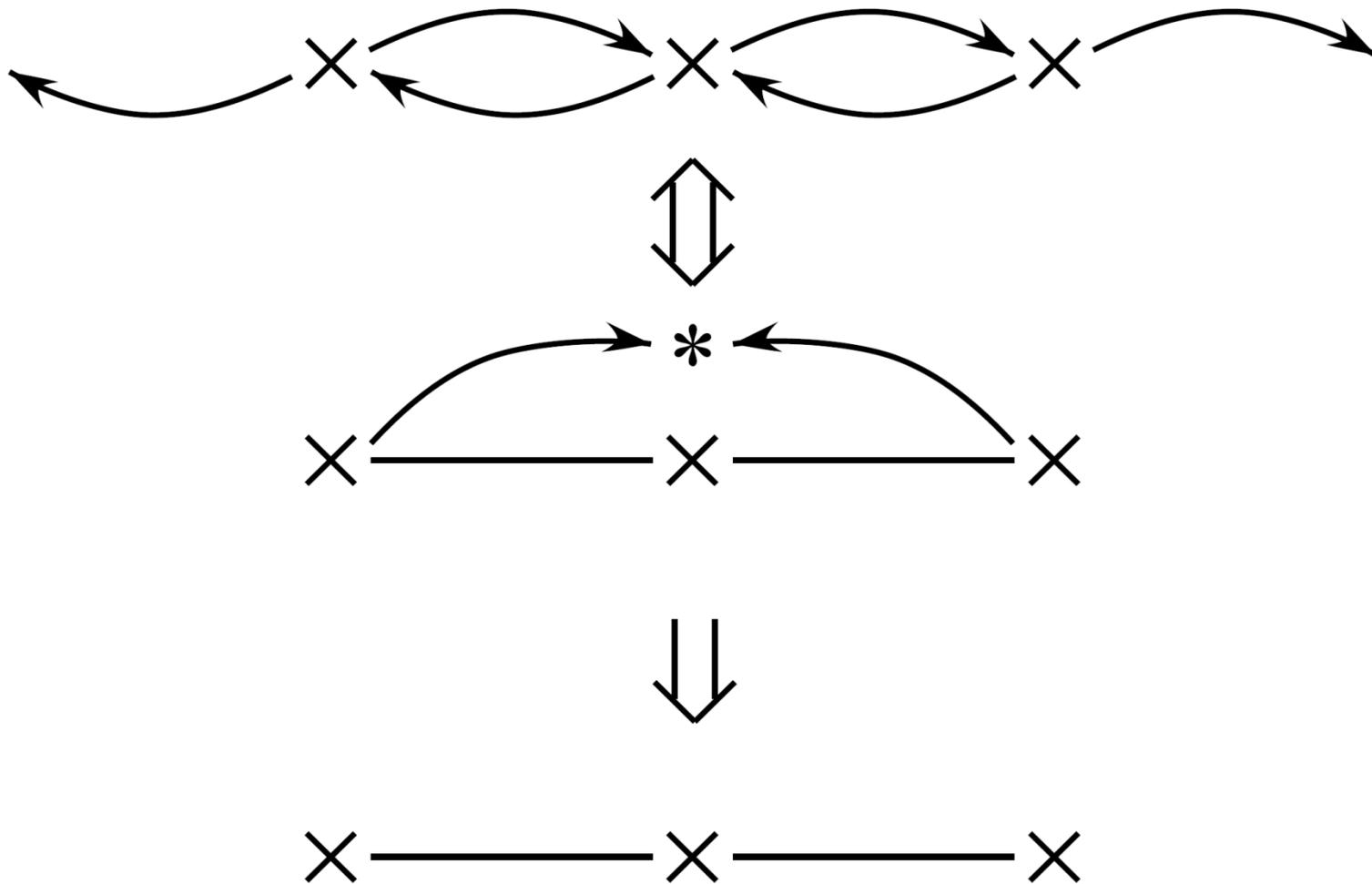
$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Delta_*(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda.$$

上の計算結果は次のように表される :

$\mathbf{x} \in \Lambda$ に対して

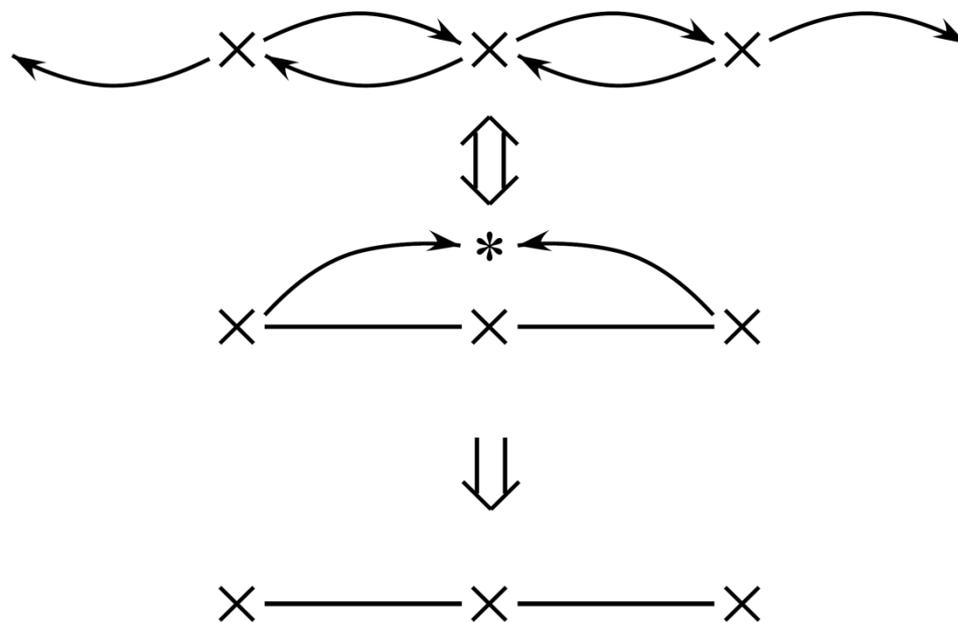
$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{y}: \mathbf{y} \in \Lambda} \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\Delta_*(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{x} \text{ 上の砂山の 1 回の toppling で格子 } \Lambda \text{ から散逸してしまう砂粒の総数} \end{aligned}$$

サイズ $L = 3$ の 1 次元格子 (直線) 上のモデル

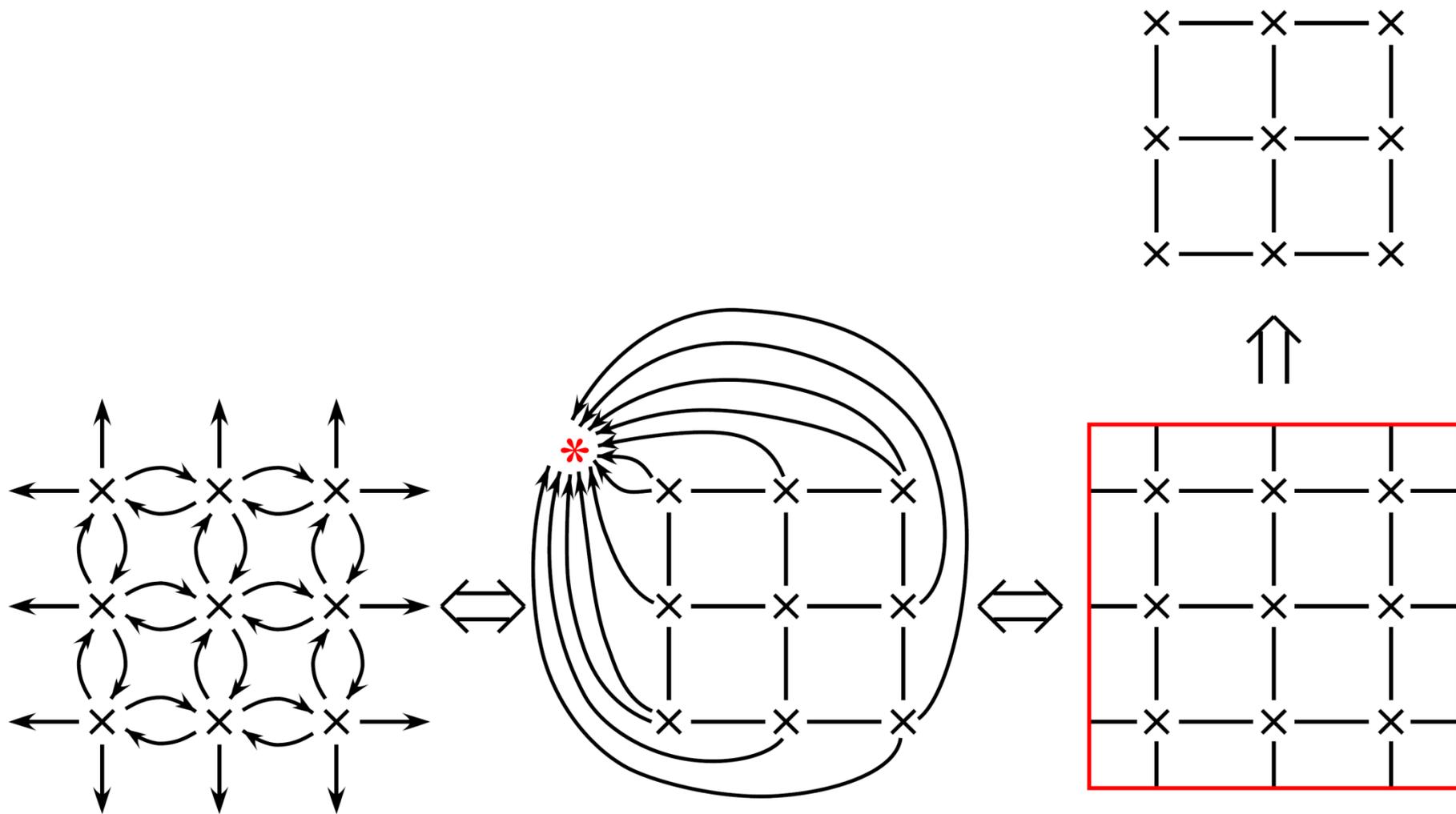


サイズ $L = 3$ の 1 次元格子（直線）上のモデル

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} 2, & x = y \text{ のとき} \\ -1, & |x - y| = 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

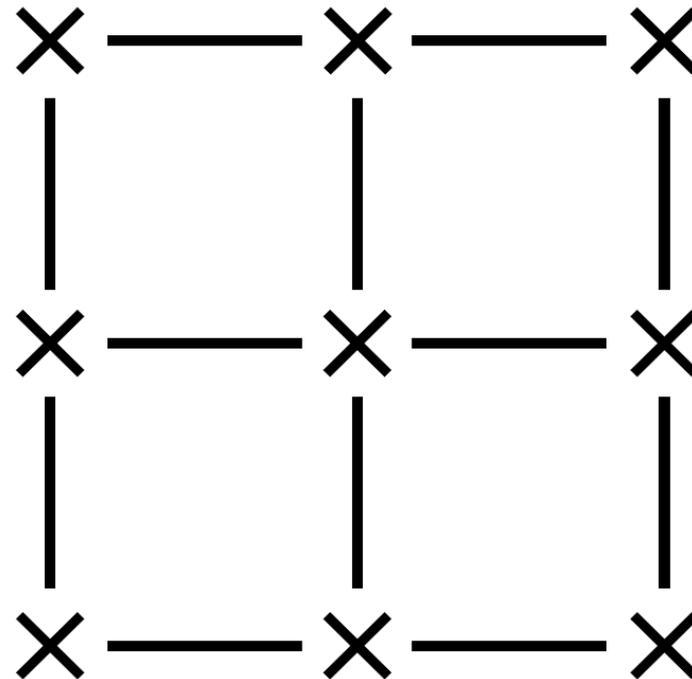


サイズ $L = 3$ の 2 次元格子（正方格子）上のモデル



サイズ $L = 3$ の 2 次元格子（正方格子）上のモデル

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 4, & \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ のとき} \\ -1, & |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \text{ のとき} \end{cases}$$



d 次元 **BTW** 模型 (**Bak-Tang-Wiesenfeld model**) :

$\Lambda = B_L = \{1, 2, \dots, L\}^d$ (サイズ L の d 次元立方格子) の上,
次のルール行列で定義される.

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 2d, & \mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ のとき} \\ -1, & |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{それ以外} \text{ のとき} \end{cases}$$