

可換砂山模型の数理

Mathematical Aspects of
the Abelian Sandpile Models

香取眞理(中大理工)

Katori, Makoto (Chuo University)

part 2/3

日本物理学会 2015年秋季大会

19aCX 領域 11, 6, 12 合同シンポジウム

塑性固体のダイナミクス: その非線形応答, なだれとレオロジー

2015年9月19日

関西大学千里山キャンパス

目次:

1. 可換砂山模型(ASM)の定義と基本的な性質
2. 可換砂山模型(ASM)と離散ポアソン方程式
3. 再帰的配置と全域木(spanning tree)との
1対1対応
4. 砂山(ASP)-全域木(spanning tree)の
局所-大域双対性
5. 可換砂山模型(ASM)研究が教えること

1.2 時空上での局所的な摂動と 大域的な「なだれ」(avalanche)

- これまでの定義では $\eta_t(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, \dots\}, \mathbf{x} \in \Lambda$.
- このうち、安定な砂山高さ配置は $h_t(\mathbf{x}) \in \{0, 1, 2, \dots, h_c - 1\}, \forall \mathbf{x} \in \Lambda$.



$$h_t = (h_t(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Lambda} \in \mathcal{S} \equiv \text{安定配置全体の集合}$$

- \mathcal{S} 内の配置の間を遷移するプロセスを考えたい.

$$(h_t)_{t \in \mathbb{N}_0} = \left((h_t(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Lambda} \right)_{t \in \mathbb{N}_0}.$$

- (1) ある時刻 $t \in \mathbb{N}_0$ で $h_t \in \mathcal{S}$ とする. これに局所的な摂動を加える.
例えば, Λ 中の 1 つの格子点 $\mathbf{x} \in \Lambda$ を選び, 砂粒を 1 つ加える.

$$\eta_{(1)}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = h_t(\mathbf{z}) + \delta_{\mathbf{z}\mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{z} \in \Lambda.$$

- (2) もしも, $\eta_{(1)}^{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$ なら (つまり, $\eta_{(1)}^{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) < h_c(\mathbf{x})$ なら)

$$h_{t+1} = \eta_{(1)}^{\mathbf{x}}.$$

- (2)' 別の (あるいは同じ) 格子点を選んで, そこに砂粒を 1 つ加える. 以下, 同様.

(3) もしも、 $\eta_{(1)}^{\mathbf{x}} \notin \mathcal{S}$ なら (つまり、 $\eta_{(1)}^{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \geq h_c(\mathbf{x})$ なら) , \mathbf{x} 上の砂山を topple させる.



この toppling の結果, 周囲の格子点 \mathbf{y} 上の砂山が不安定化することがある.



toppling を連鎖的に起こす.



再び安定配置になるまで繰り返す.

この一連の toppling をなだれ (avalanche) とよぶ.

- 一連の toppling の記述方法 :

- $\eta_{(0)}^{\mathbf{x}} \equiv h_t$ として, 不安定配置の列 $\{\eta_{(1)}^{\mathbf{x}}, \eta_{(2)}^{\mathbf{x}}, \dots, \eta_{(\ell)}^{\mathbf{x}}, \dots\}$ を以下のように構成する.
- $\eta_{(\ell)}^{\mathbf{x}} \notin \mathcal{S}, \ell \geq 1 \implies A_{(\ell)}^{\mathbf{x}}(h_t) = \{\mathbf{z} \in \Lambda : \eta_{(\ell)}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) \geq h_c(\mathbf{z})\} \neq \emptyset.$
- toppling は次式のように, ルール行列 Δ で与えられる :

$$\eta_{(\ell+1)}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \eta_{(\ell)}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \sum_{\mathbf{y}: \mathbf{y} \in A_{(\ell)}^{\mathbf{x}}(h_t)} \Delta(\mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \Lambda.$$

- なだれの継続時間 τ : 上の連鎖の結果, $\eta_{(\ell+1)}^{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}$ となったら, $\tau = \ell + 1.$

$\tau = \tau(\mathbf{x}, h_t)$: なだれ前の配置 h_t と摂動の位置 \mathbf{x} の関数

- そして, $h_{t+1} = \eta_{(\tau)}^{\mathbf{x}}$ とする.

なだれの継続時間はいつも有限 $\tau < \infty$ でなければ, プロセスは定義できない.

必ず散逸がなければならない.

- 有限格子 $\Lambda = B_L$ (サイズ L の立方格子) 上の BTW 模型
散逸は B_L の境界のみで起こる.
空間的に非一様な系.
システムサイズ $L \rightarrow \infty$ で一様な熱力学的極限を得ることを証明することに困難.
(バルク極限 \neq 熱力学的極限)

- **dissipative ASM**

Tsuchiya, T., Katori, M.: Phys. Rev. E **61**, 1183 (2000).

Katori, M.: MI lecture note (Kyushu University) **63**, pp.58-91 (2015);
arXiv:math-ph/1505.00334.

空間的に一様な系 (トーラス T_L 上で定義)

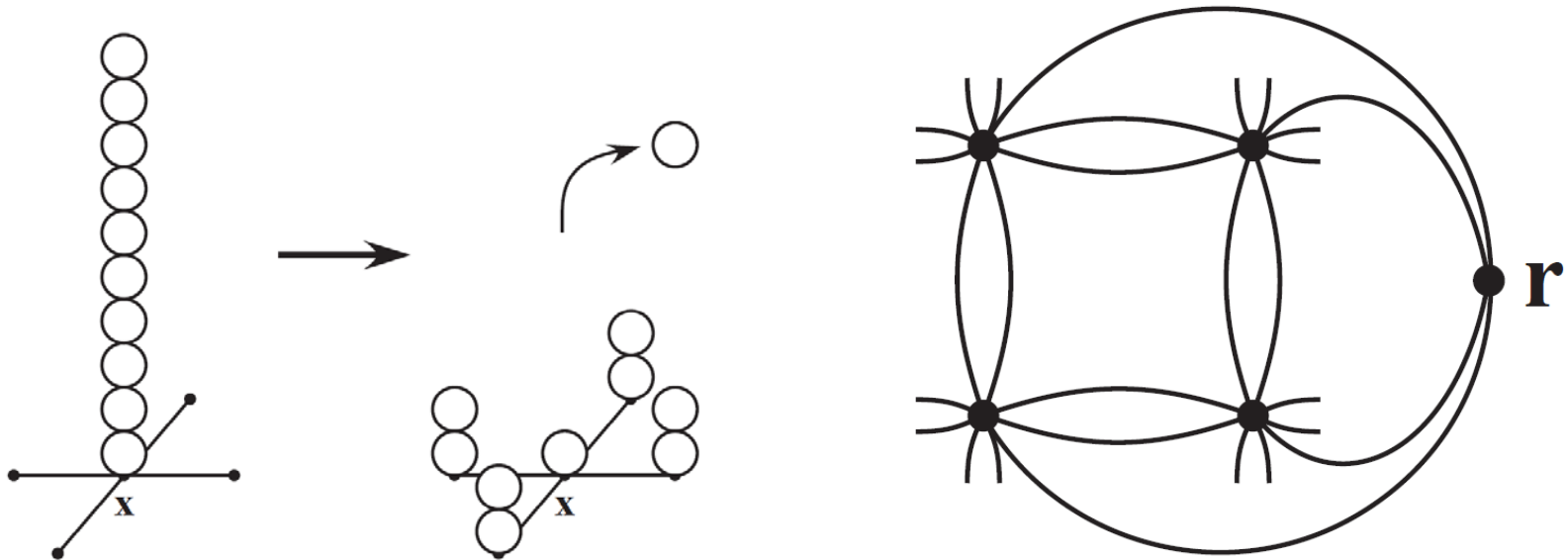
各格子点で一定の率で散逸あり.

熱力学的極限の存在が証明できる.

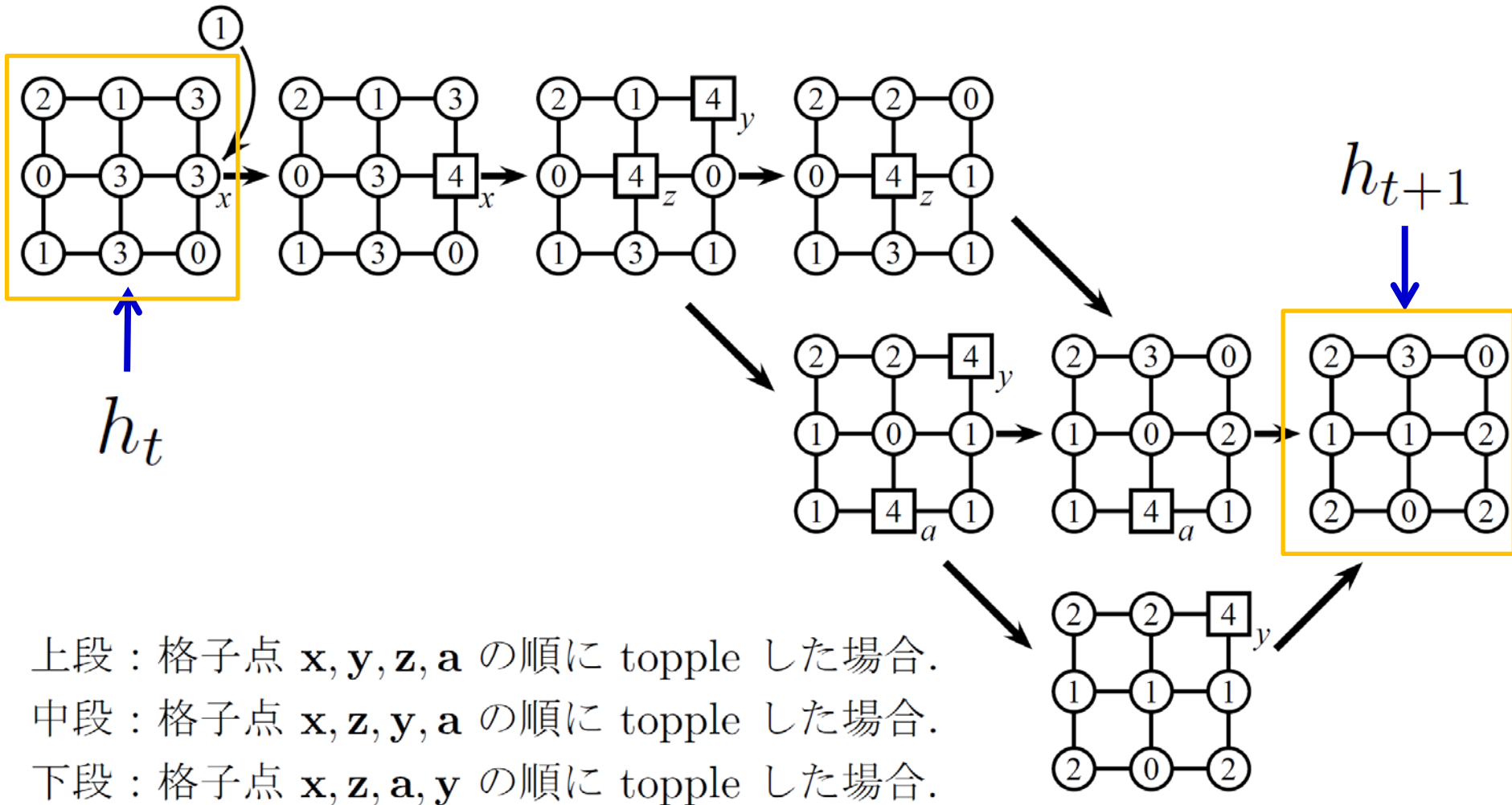
(その後, 散逸率 $\rightarrow 0$ の極限をとる : off-critical \rightarrow critical)

Schmidt, K., Verbitskiy, E.: Commun. Math. Phys. **292**, 721-750 (2009).

Járai, A., Redig, F., Saada, E.: J. Stat. Phys. **159**, 1369-1407 (2015).



1.3 toppling と「なだれ」の順番の可換性



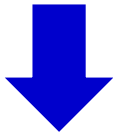
- Dhar (1990) に従って, 「なだれ演算子」を導入する.
 $\mathbf{x} \in \Lambda$ が摂動を加える格子点 (砂粒を 1 つだけ加える).
 これにより, $h_t \in \mathcal{S} \mapsto h_{t+1} \in \mathcal{S}$ と遷移するとき, これを次のように書く :

$$h_{t+1} = a(\mathbf{x})h_t$$

- 前述の toppling の順番の可換性

+

$a(\mathbf{x})$ は toppling の連鎖であること



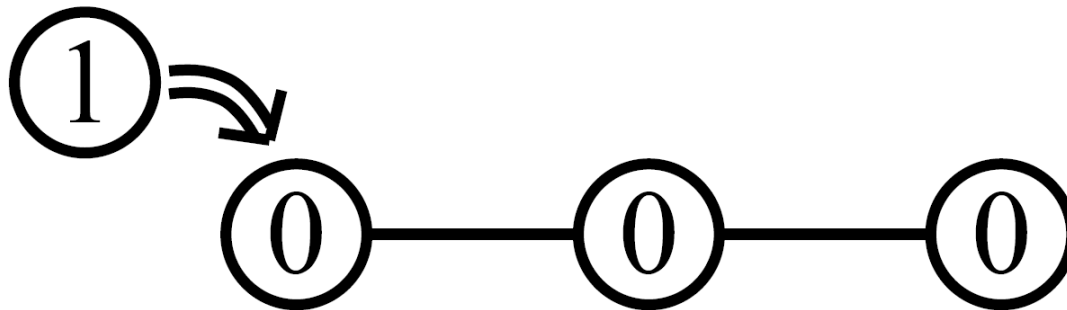
$$[a(\mathbf{x}), a(\mathbf{y})] \equiv a(\mathbf{x})a(\mathbf{y}) - a(\mathbf{y})a(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda.$$

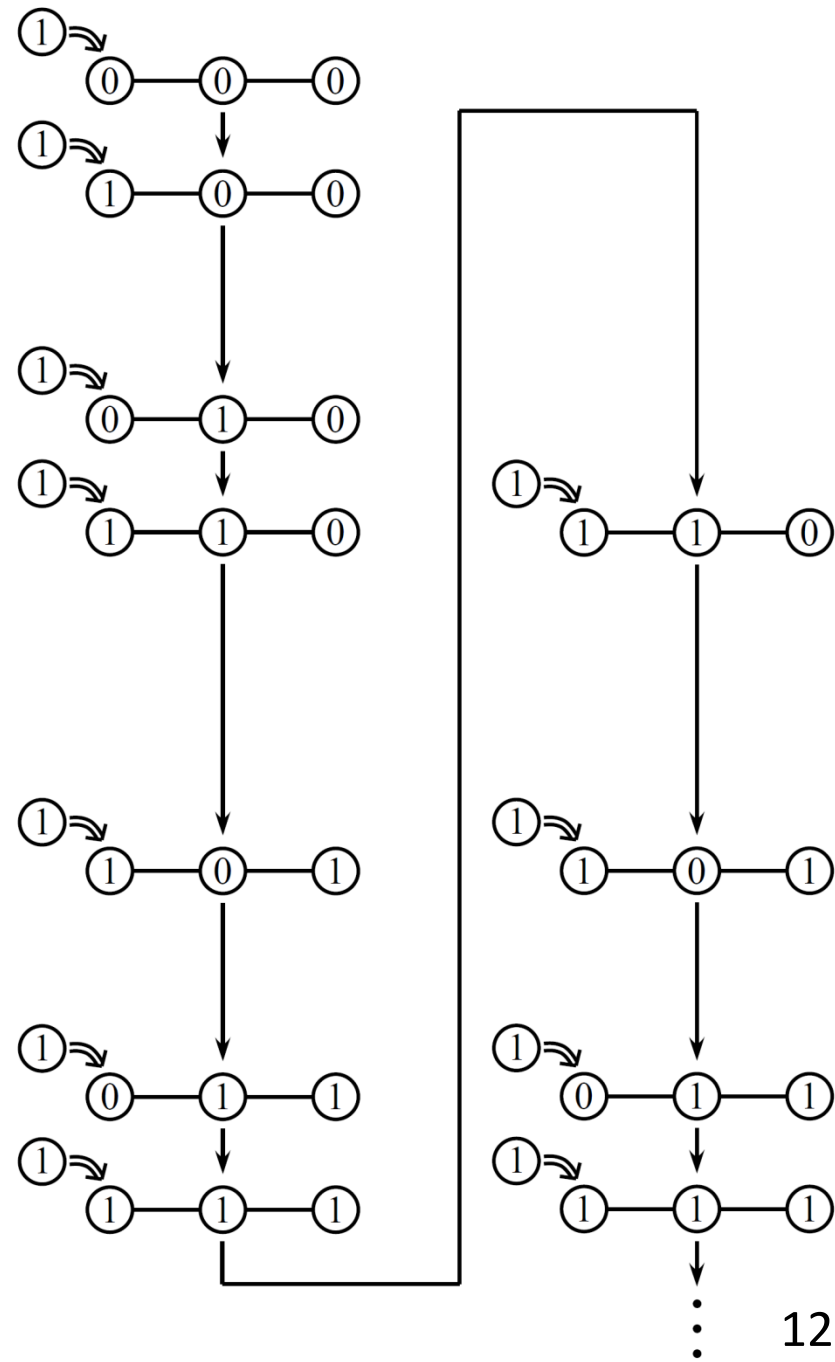
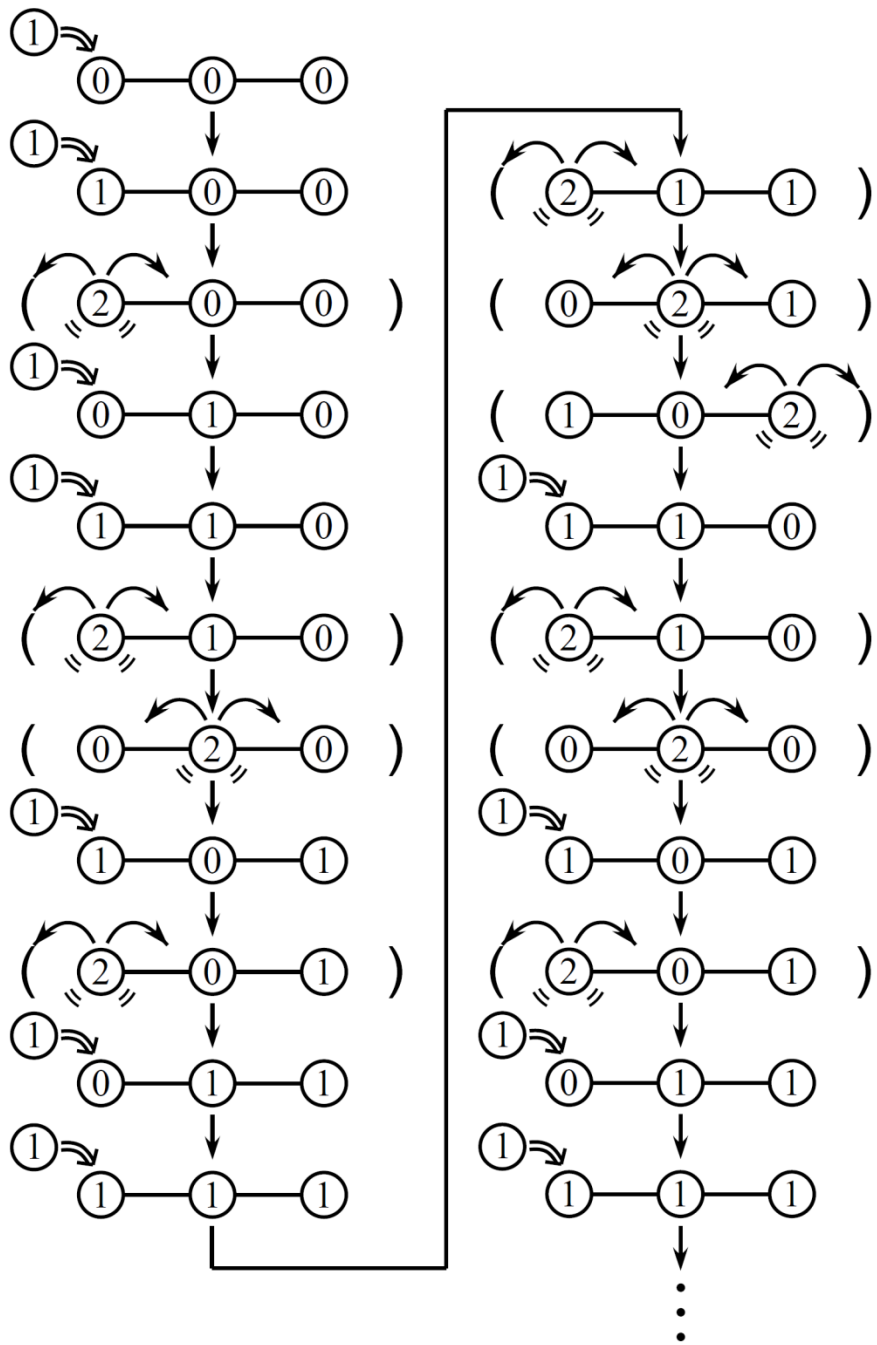
Abelian Sandpile Model (可換砂山模型)

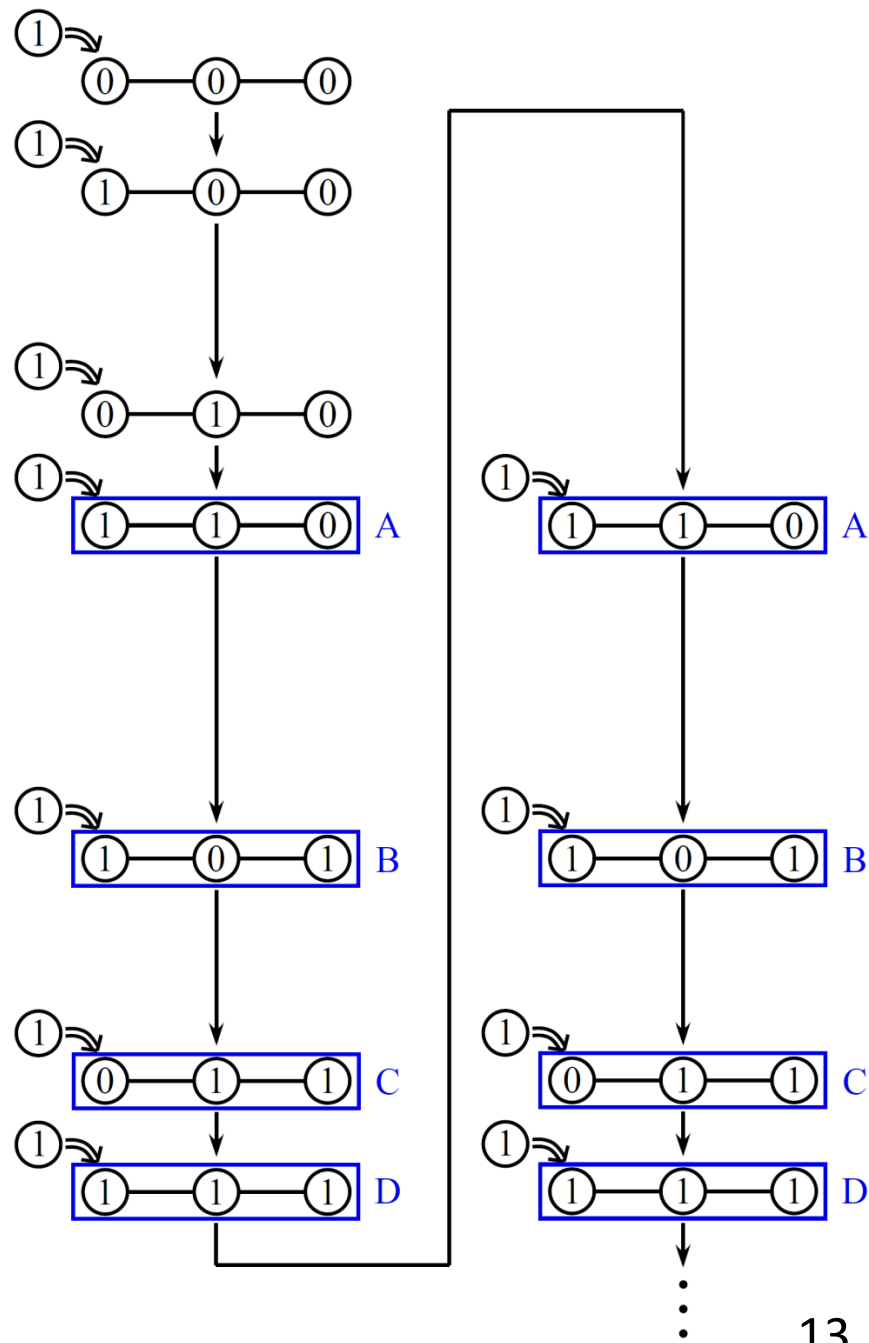
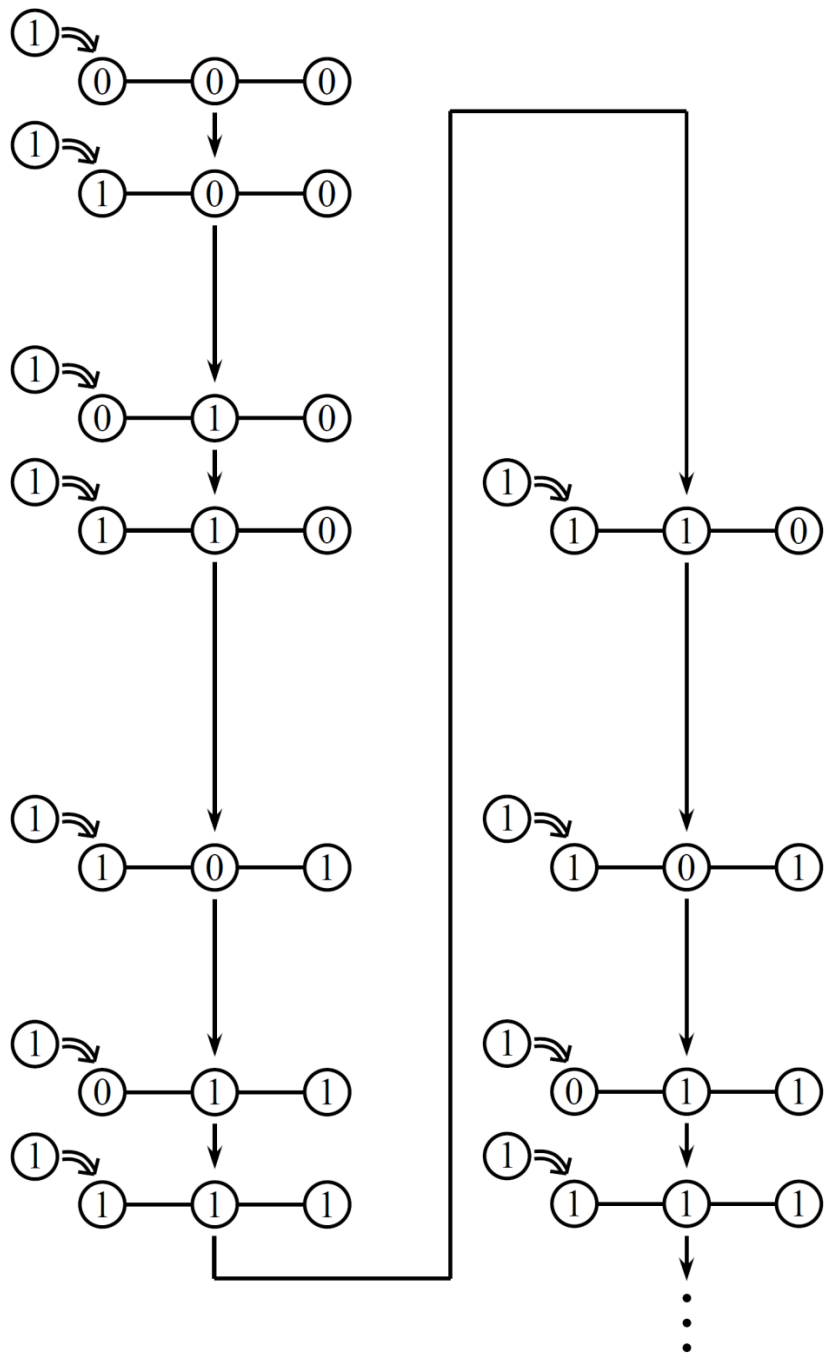
Dhar, D.: Phys. Rev. Lett. **64**, 1613-1616 (1990).

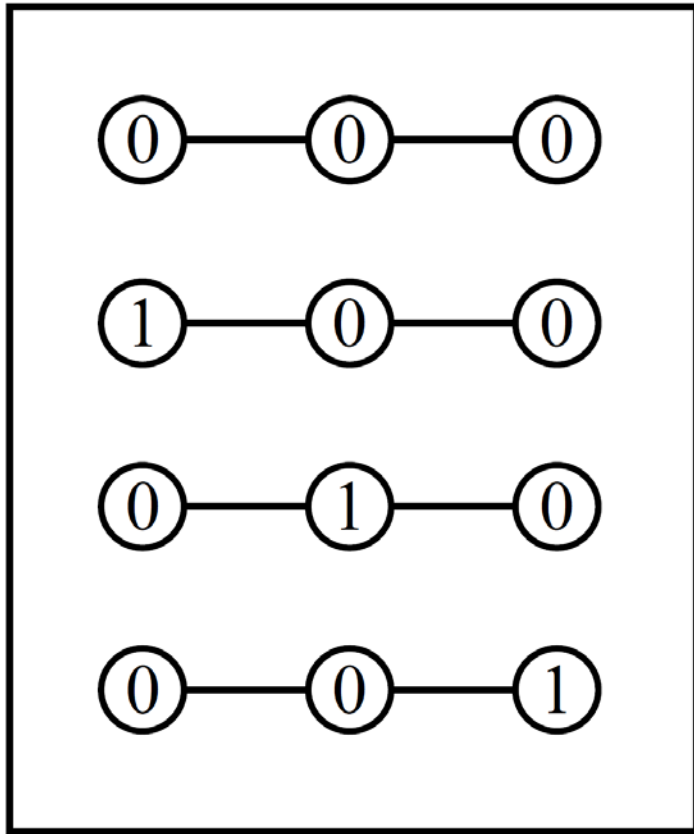
1.4 再帰的配置

- 簡単化のため、 $L = 3$ の 1 次元 BTW 模型を考えることにする.
- 空の配置から始める.
- 左端の格子点に摂動を加える.
この摂動を何度も繰り返すことにより、プロセスを進める.

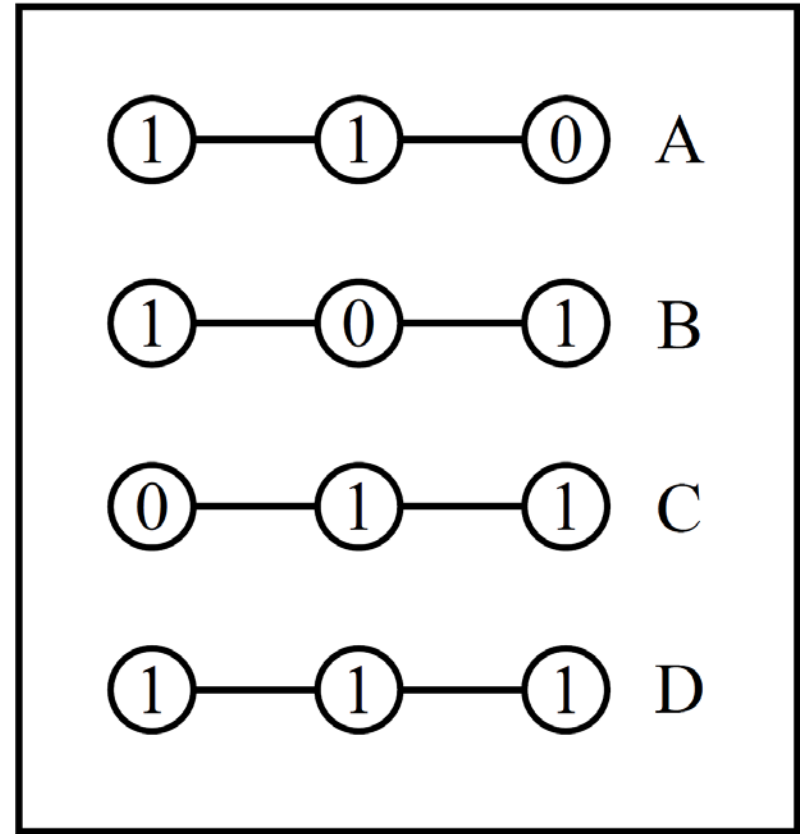








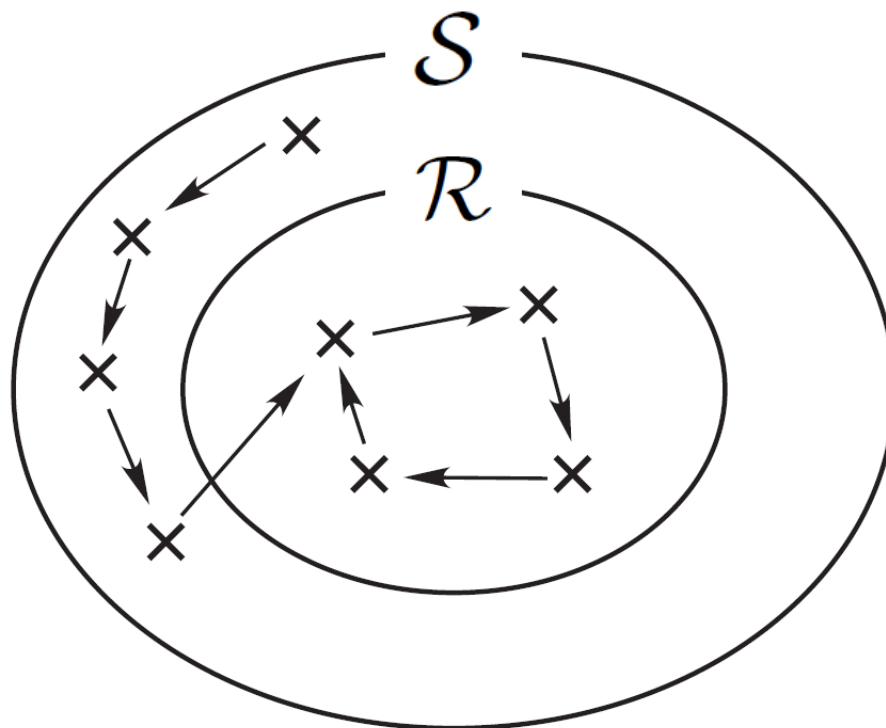
$2^3 = 8$ 個の安定配置のうち、
この 4 つは過渡的配置
(transient configurations)



この 4 つは再帰的配置
(recurrent configurations)

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \text{安定配置全体の集合} \\ \mathcal{R} = \text{再帰的配置全体の集合} \end{cases}$$

- $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$
- \mathcal{R} は「なだれプロセス」で閉じている.
 $h \in \mathcal{R} \Rightarrow a(\mathbf{x})h \in \mathcal{R}, \forall \mathbf{x} \in \Lambda$



1.5 マルコフ鎖としての ASM

- 摂動を Λ 上で一様ランダムに格子点を選んで与える.
- この摂動の与え方だけが確率的 (stochastic), なだれのプロセスは決定論的 (deterministic)
- 全体として ASM はマルコフ鎖 (Markov process) になる.
- (BTW モデル, dissipative ASM を含む) 多くの ASM が再帰配置空間 \mathcal{R} において, irreducible である (エルゴード的である) ことが示せる.



(マルコフ鎖の一般論から)

定常分布は唯一

定常分布は \mathcal{R} 上の一様分布

ASM の定常状態

- 等重率則が成立（ミクルカノニカル分布）
- 大縮退した基底状態
- 多数の固定点（安定点）の集合

Totally Nonfree Actions (A. M. Vershik)

2. 可換砂山模型 (ASM) と離散ポアソン方程式

- 砂山配置が $h \in \mathcal{R}$ のとき,

$$\begin{aligned}
 T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, h) &= \text{格子点 } \mathbf{x} \text{ に 1 砂粒を加えたとき, それによって引き起こされる} \\
 &\quad \text{なだれの最中に, 格子点 } \mathbf{y} \text{ 上で toppling が起こる回数} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{\tau(\mathbf{x}, h)-1} \mathbf{1}(\mathbf{y} \in A_{(\ell)}^{\mathbf{x}}(h)), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda.
 \end{aligned}$$

ただし, $\mathbf{1}(\omega)$ は, 条件 ω が満たされたとき 1, それ以外は 0.

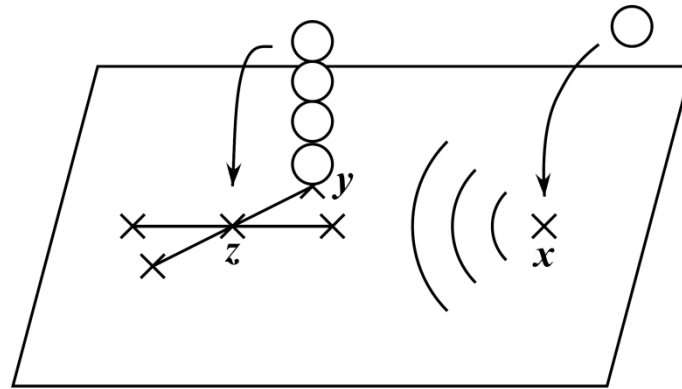
- ASM の定常分布を μ と書く. なだれ高さ $h \in \mathcal{R}$ をこの μ で平均する.
- この平均操作を $\langle \dots \rangle$ で表すことにする.
- (定常分布における) なだれ伝播関数

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, h) \rangle \\
 &= \text{格子点 } \mathbf{x} \text{ に 1 砂粒を加えたとき, それによって引き起こされる} \\
 &\quad \text{なだれの最中に, 格子点 } \mathbf{y} \text{ 上で toppling が起こる平均回数.}
 \end{aligned}$$

• $\mathbf{z} \in \Lambda$ に対して

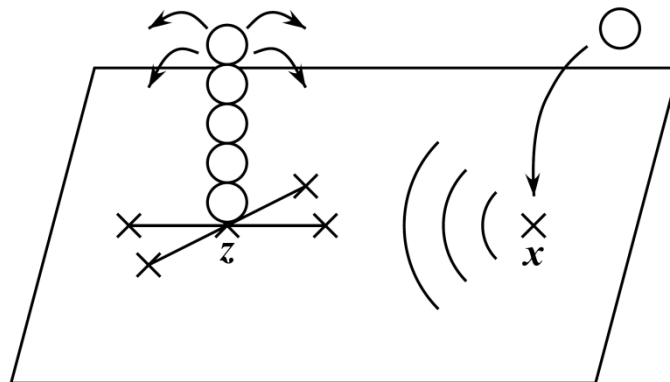
$J_{\text{in}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ = 格子点 \mathbf{x} に 1 砂粒を加えたとき, それによって引き起こされる
なだれによって, 格子点 \mathbf{z} に流入する砂粒の平均数

$$= \delta_{\mathbf{x}\mathbf{z}} + \sum_{\mathbf{y}:\mathbf{y}\neq\mathbf{z}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})|\Delta(\mathbf{y},\mathbf{z})| = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{z}} - \sum_{\mathbf{y}:\mathbf{y}\neq\mathbf{z}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta(\mathbf{y},\mathbf{z})$$



$J_{\text{out}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ = 格子点 \mathbf{x} に 1 砂粒を加えたとき, それによって引き起こされる
なだれによって, 格子点 \mathbf{z} から流出する砂粒の平均数

$$= G(\mathbf{x},\mathbf{z})\Delta(\mathbf{z},\mathbf{z})$$



- 定常状態では、すべての格子点 \mathbf{z} でこの 2 つが釣り合っている：

$$J_{\text{in}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = J_{\text{out}}^{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) \iff \delta_{\mathbf{x}\mathbf{z}} - \sum_{\mathbf{y}:\mathbf{y}\neq\mathbf{z}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta(\mathbf{y},\mathbf{z}) = G(\mathbf{x},\mathbf{z})\Delta(\mathbf{z},\mathbf{z})$$

$$\iff \sum_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{z}}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Lambda.$$

- ポアソン方程式のグリーン関数の式 $\Delta g(\mathbf{z}) = \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x})$ の離散化と見なせる。
- massless field \iff ASM (Self-Organized Criticality)

- 行列表示

$$\begin{cases} \Delta = (\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda}, \\ G = (G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda}, \\ I = (\delta_{\mathbf{x}\mathbf{y}})_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda} \end{cases} \implies G\Delta = I \implies G = \Delta^{-1}$$

つまり, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\Delta^{-1}](\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda.$ (ルール行列 Δ の逆行列)

- BTW 模型 (サイズ L の立方格子 B_L の上)
 $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ を固定して $[\Delta^{-1}](\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を求めてから, $L \rightarrow \infty$ の極限をとる.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \simeq -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad d = 2,$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \simeq \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2}}, \quad d \geq 3.$$

- 定常状態でのなだれの平均規模 (toppling が平均何回起こるか)

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \sum_{\mathbf{y} \in \Lambda} \langle T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, h) \rangle = \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \sum_{\mathbf{y} \in \Lambda} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \sim L^2 \rightarrow \infty, \quad d \geq 3.$$

(BTW モデルで $L \rightarrow \infty$ において)

- ASM (なだれ現象一般?)

べき乗則 \implies SOC (Self-Organized Criticality)

拡散的 \iff ランダムウォーク (ブラウン運動) 的:
 (フラクタル次元) 2次元的な広がり