

可換砂山模型の数理

Mathematical Aspects of
the Abelian Sandpile Models

香取眞理(中大理工)

Katori, Makoto (Chuo University)

part 3/3

日本物理学会 2015年秋季大会

19aCX 領域 11, 6, 12 合同シンポジウム

塑性固体のダイナミクス: その非線形応答, なだれとレオロジー

2015年9月19日

関西大学千里山キャンパス

目次:

1. 可換砂山模型(ASM)の定義と基本的な性質
2. 可換砂山模型(ASM)と離散ポアソン方程式
3. 再帰的配置と全域木(spanning tree)との
1対1対応
4. 砂山(ASP)-全域木(spanning tree)の
局所-大域双対性
5. 可換砂山模型(ASM)研究が教えること

3. 再帰的配置と 全域木 (spanning tree) との 1対1対応

3.1 超格子上的での ASM プロセスと行列式

- 格子点 $\mathbf{x} \in \Lambda \iff$ 単位ベクトル $\mathbf{e}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x}\mathbf{y}}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda \implies |\Lambda| \text{次元ベクトル空間 } \mathcal{V} \text{ を定義}$$

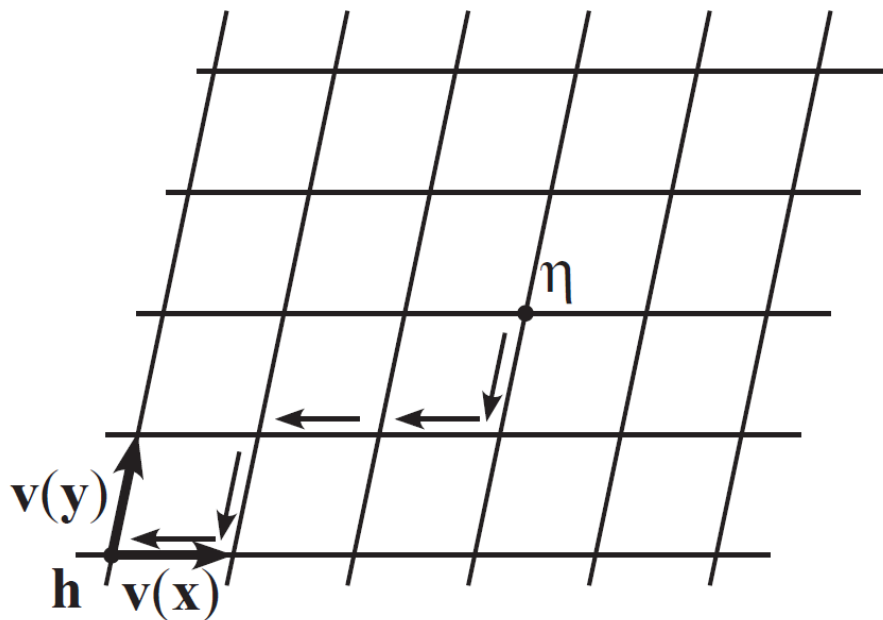
- 高さ配置は \mathcal{V} 内のベクトルで表せる：

$$\begin{aligned} & \text{砂山高さ配置 } \eta = (\eta(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Lambda} \in \mathbb{N}_0^{|\Lambda|} \\ \iff & \text{ベクトル } \boldsymbol{\eta} = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda} \eta(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V} \\ \iff & (\mathbf{e}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \Lambda} \text{ を各辺とする } |\Lambda| \text{次元立方体} \\ & \text{を単位胞とする超格子 } \Omega_0 \text{ 上の 1 つの格子点 } (\Omega_0 \subset \mathcal{V}). \end{aligned}$$

- ルール行列 Δ を用いて、次のベクトルの集合を定義する：

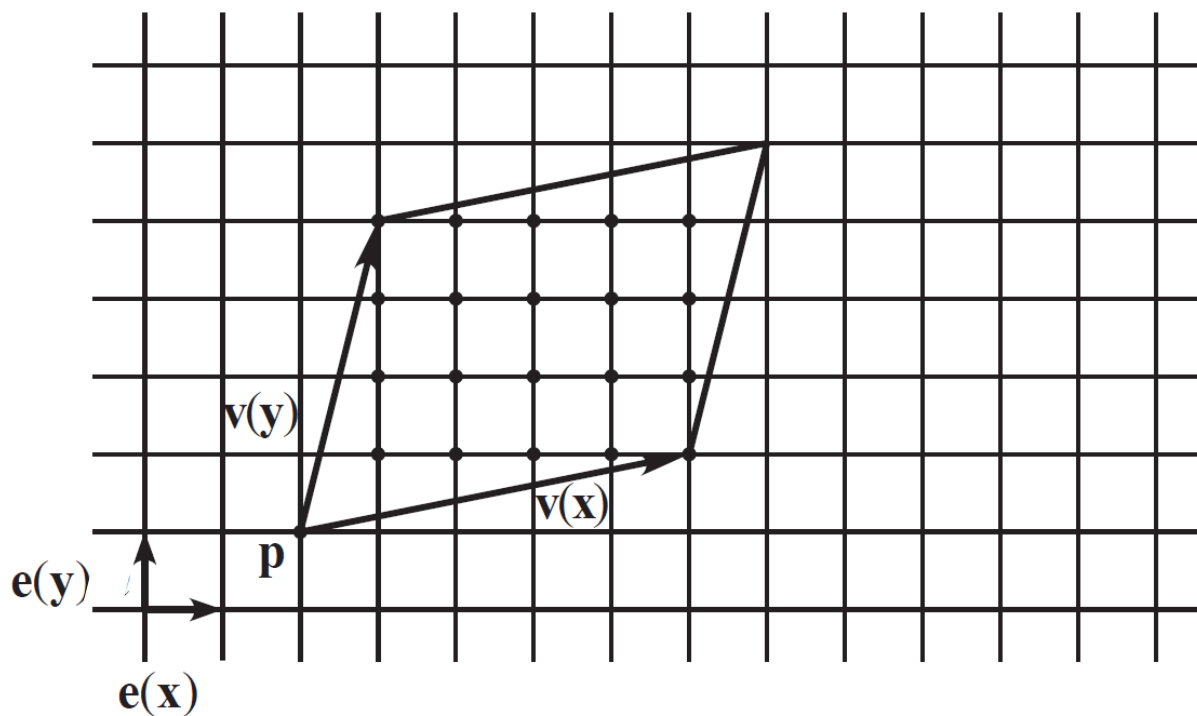
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}:\mathbf{y}\in\Lambda} \Delta(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{e}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Lambda.$$

- $(\mathbf{v}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in\Lambda}$ は単位ベクトル $(\mathbf{e}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in\Lambda}$ の合成ベクトル。
 $(\mathbf{v}(\mathbf{x}))_{\mathbf{x}\in\Lambda}$ の張る格子を Ω とする（これは原点 $\mathbf{0}$ を含む）。
 与えられた $\boldsymbol{\eta} \in \Omega_0$ （細かい方）に対して、 $\Omega_{\boldsymbol{\eta}} = \Omega + \boldsymbol{\eta}$ とする
 (Ω を $\boldsymbol{\eta}$ だけシフト $\iff \Omega_{\boldsymbol{\eta}}$ は $\boldsymbol{\eta}$ を格子点として含む)
- 不安定配置 $\boldsymbol{\eta} \mapsto$ 再帰的配置 \mathbf{h} の遷移（なだれ：avalanche）は、
 ベクトル空間 \mathcal{V} では（粗い方の）格子 $\Omega_{\boldsymbol{\eta}}$ 上のウォークで表される。



- つまり, Ω_η の 1 格子点のみが \mathcal{R} 配置
- 再帰的配置空間 $\mathcal{R} \iff \Omega$ の単位胞 (基本領域)
- 再帰的配置の総数

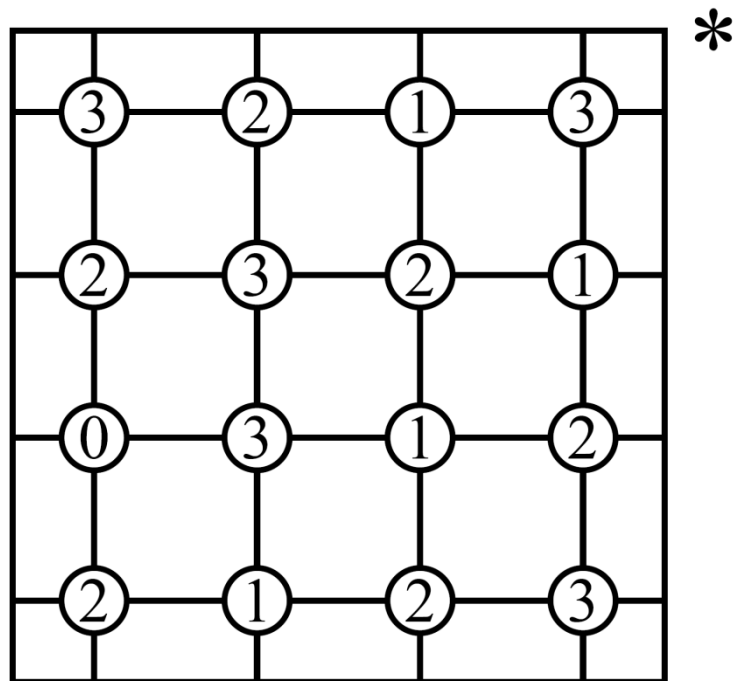
$$|\mathcal{R}| = \Omega \text{ の基本領域の体積} = \det_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda} \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$



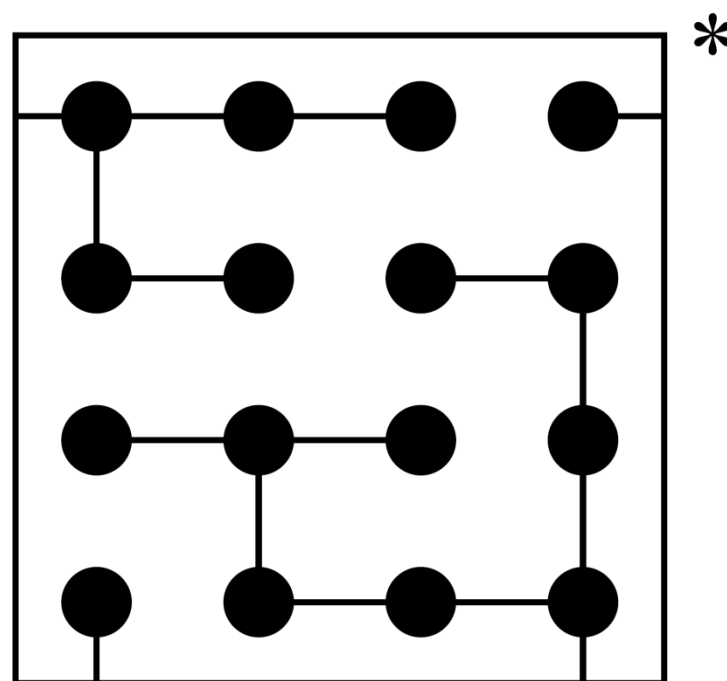
3.2 森林火災アルゴリズム (burning algorithm)

- $\det_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Lambda} \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は Section 1 で説明したグラフ $G = (V, E), V = \Lambda \cup \{\mathbf{r}\}$ の上の \mathbf{r} を根 (root) とする全域木 (spanning tree) の総数に等しい (Kirchhoff の定理).
- 上述の全域木全体の集合を \mathcal{T} と書くことにすると, $|\mathcal{R}| = |\mathcal{T}|$.
- Majumdar と Dhar は \mathcal{R} と \mathcal{T} は 1 対 1 対応していることを証明した. Majumdar, S. N., Dhar, D.: Physica A **185**, 129-145 (1992).
- 砂山高さ配置 $h \in \mathcal{R}$ から全域木 $\in \mathcal{T}$ を一意的に対応させるアルゴリズムを与えることによって, 具体的な証明がなされた.
- このアルゴリズムを **burning algorithm** (森林火災アルゴリズム) という.

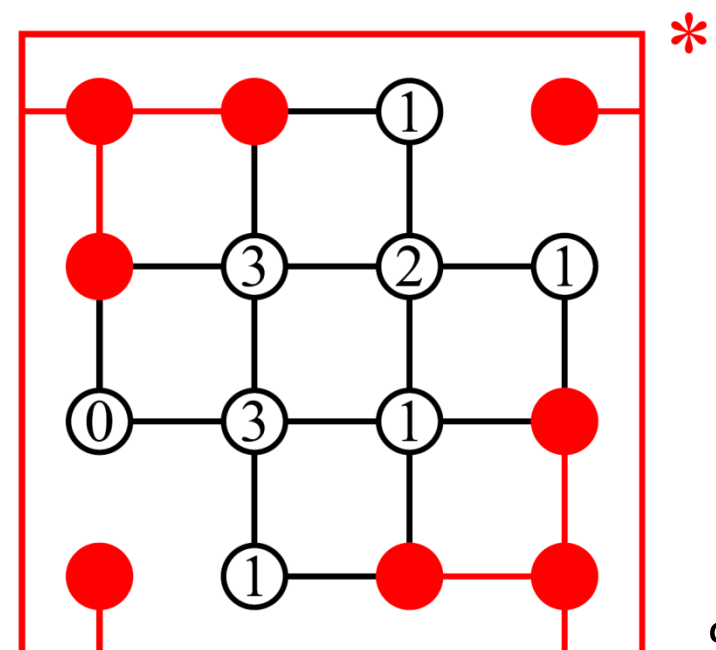
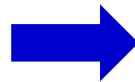
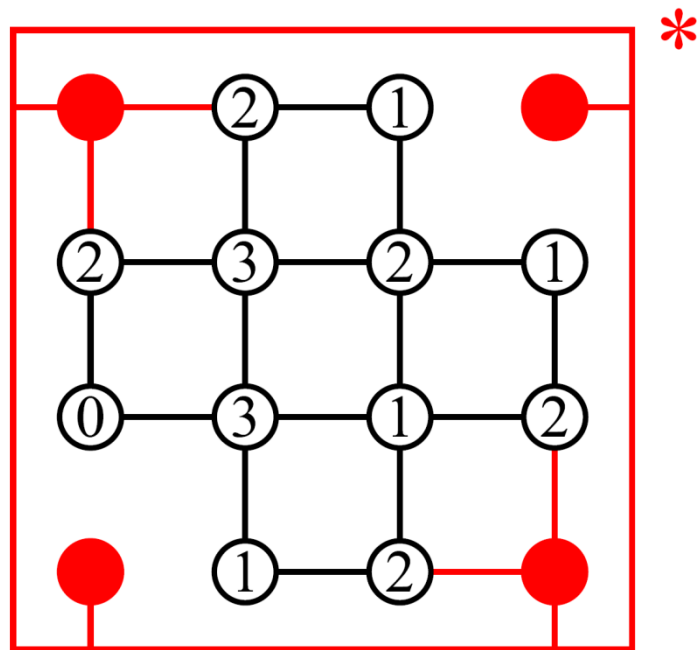
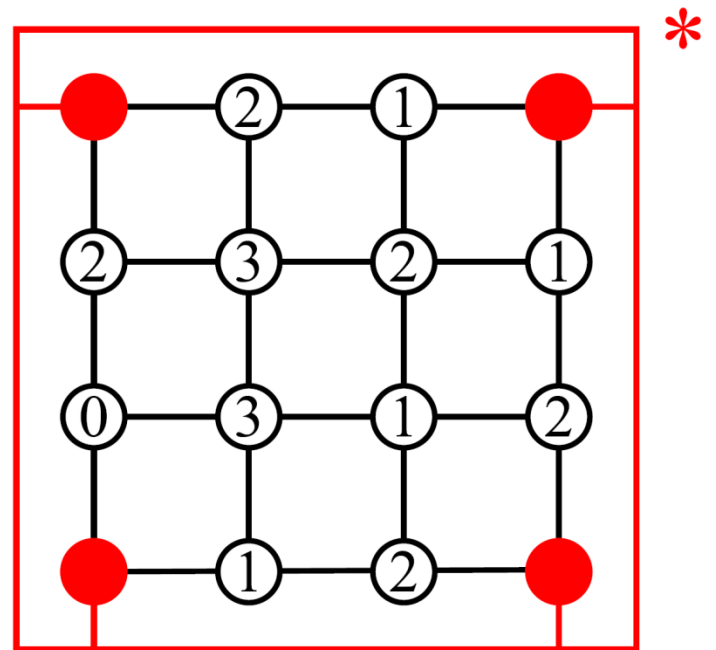
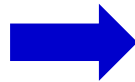
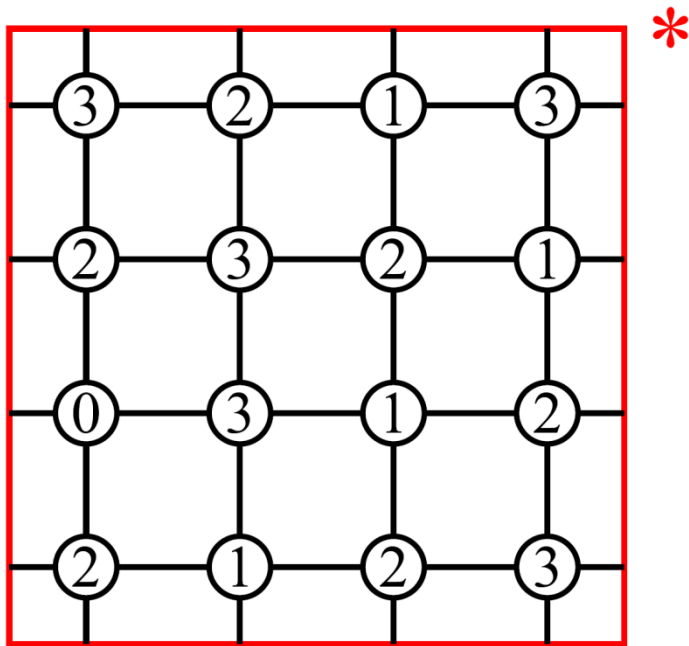
森林火災アルゴリズム (burning algorithm) の例示

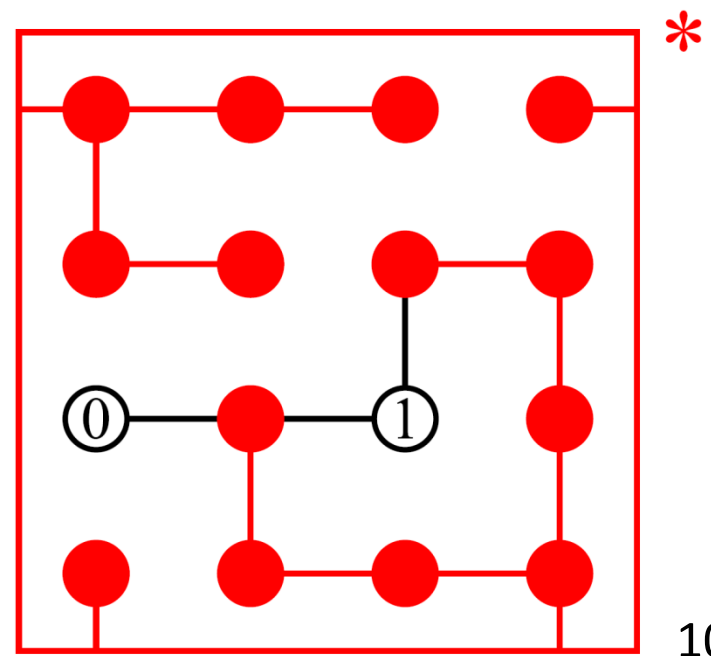
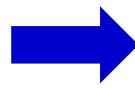
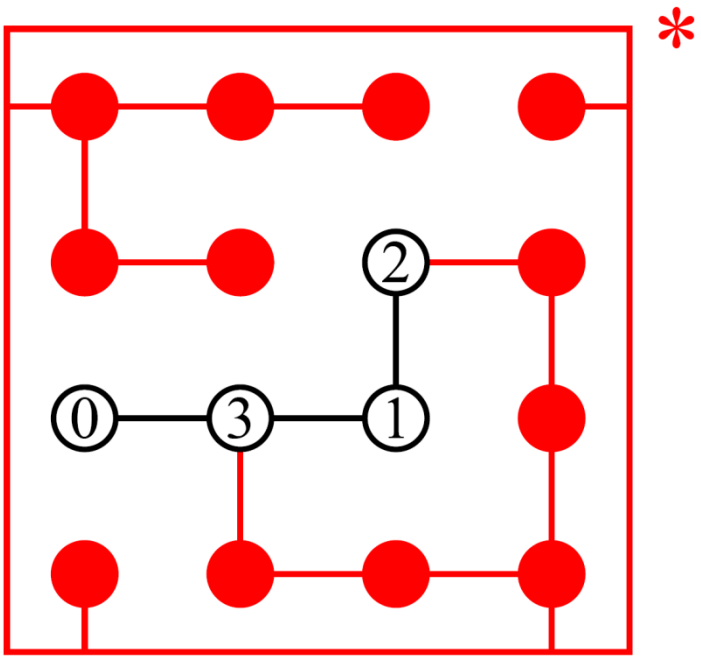
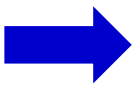
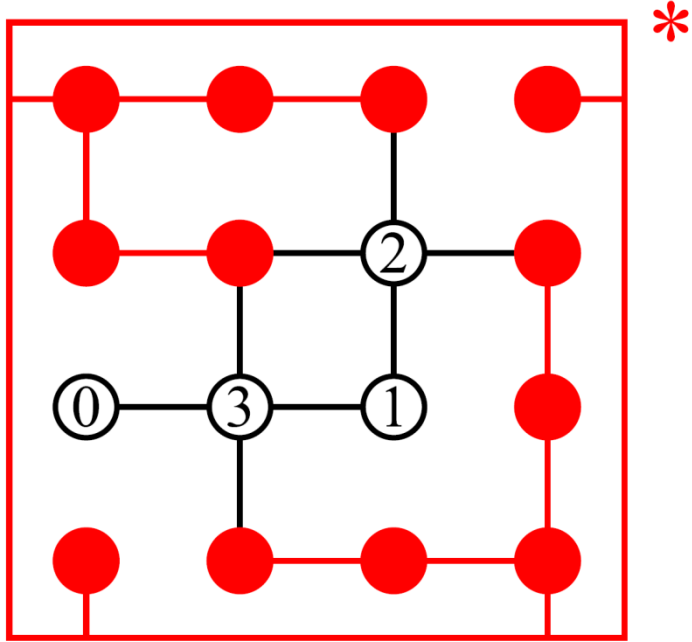
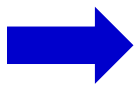
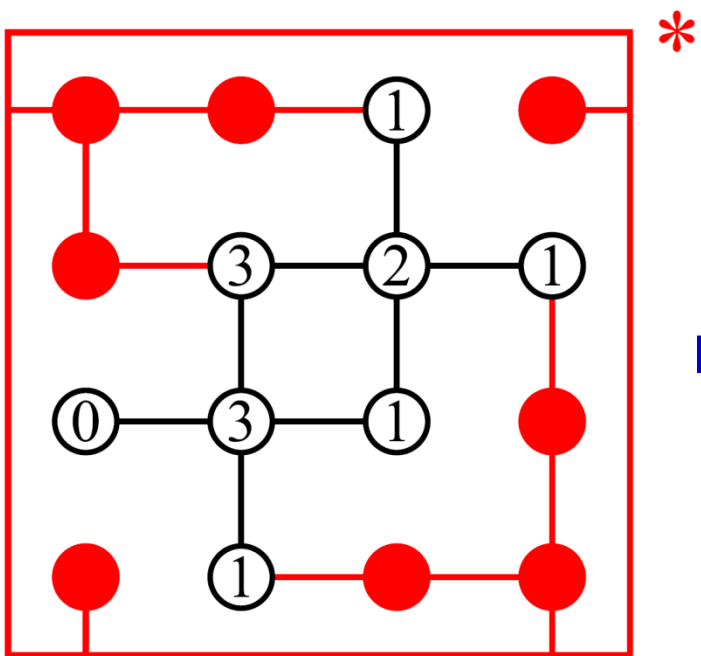


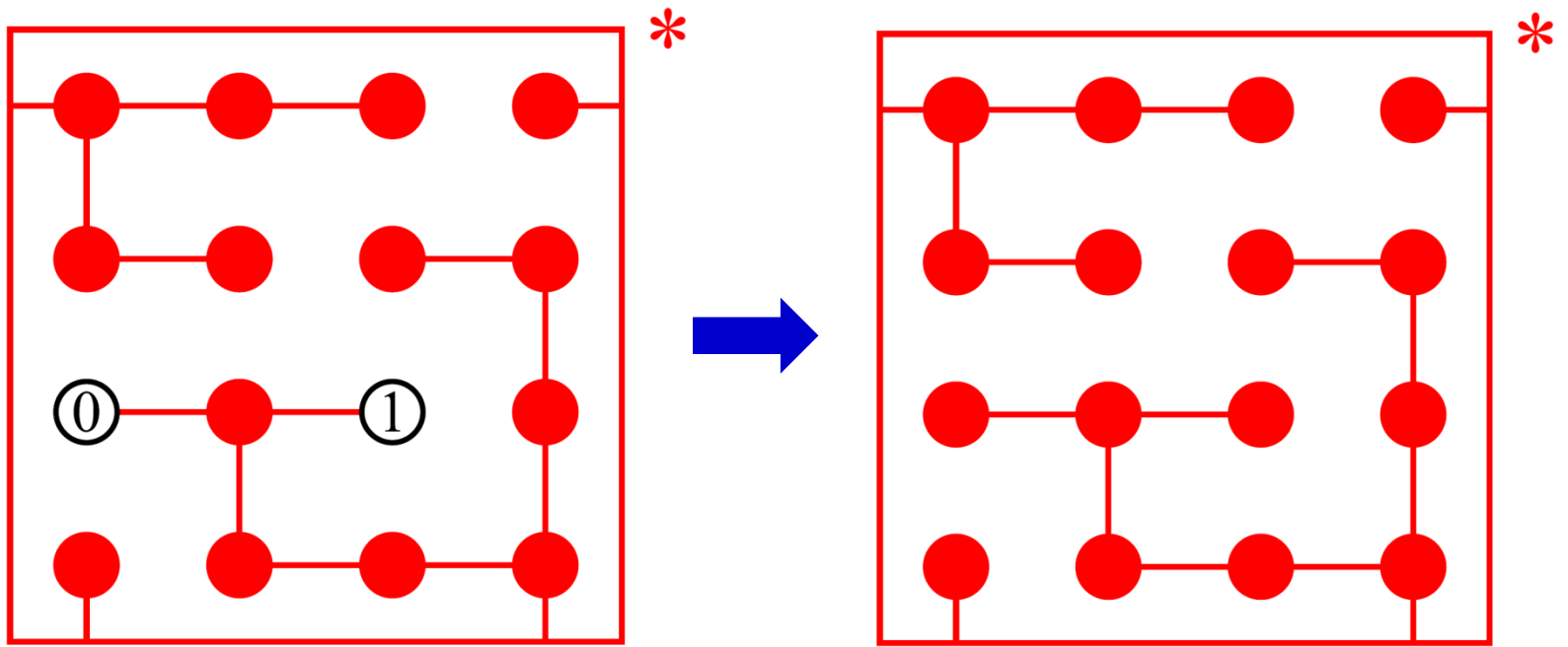
$\in \mathcal{R}$

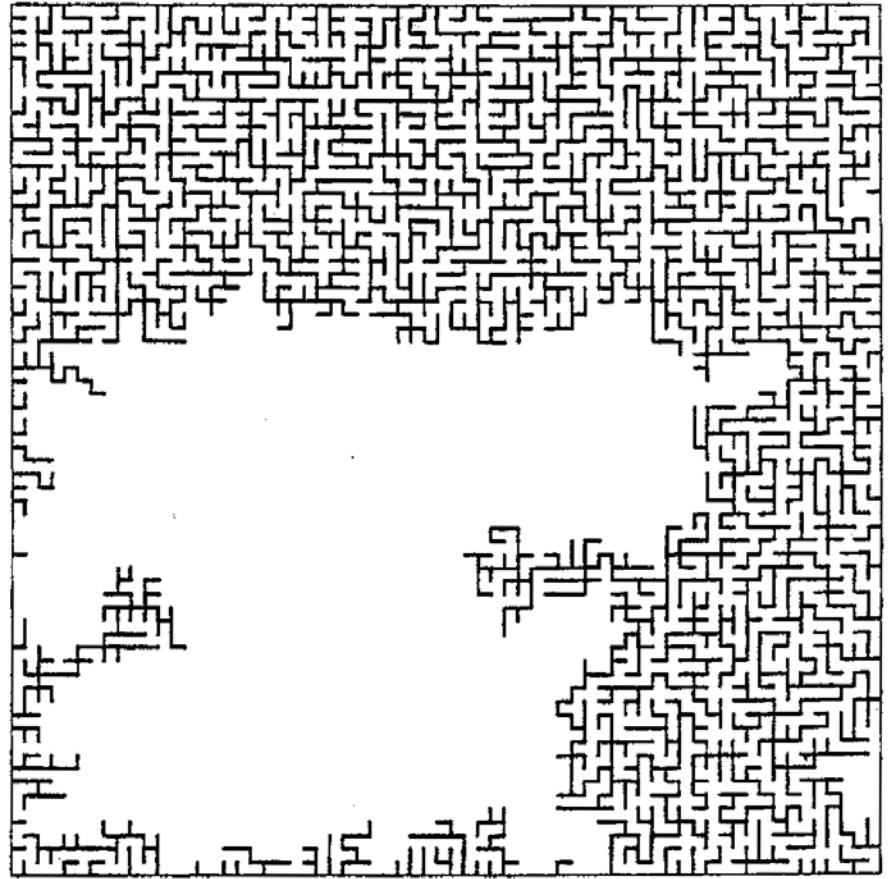
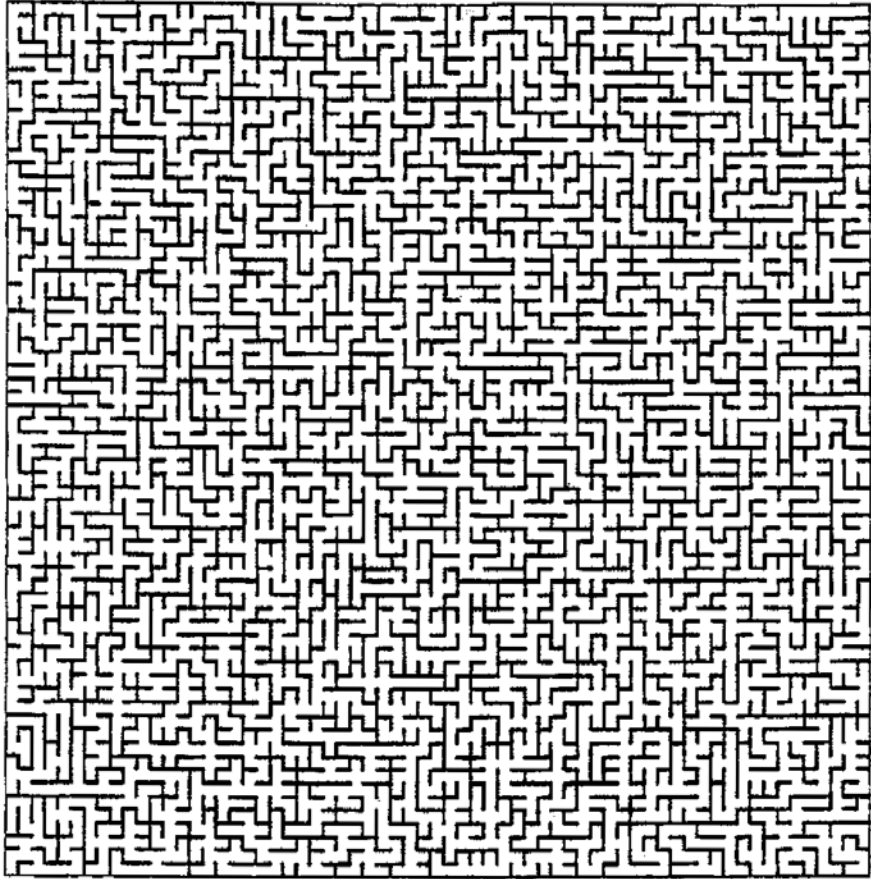


$\in \mathcal{T}$

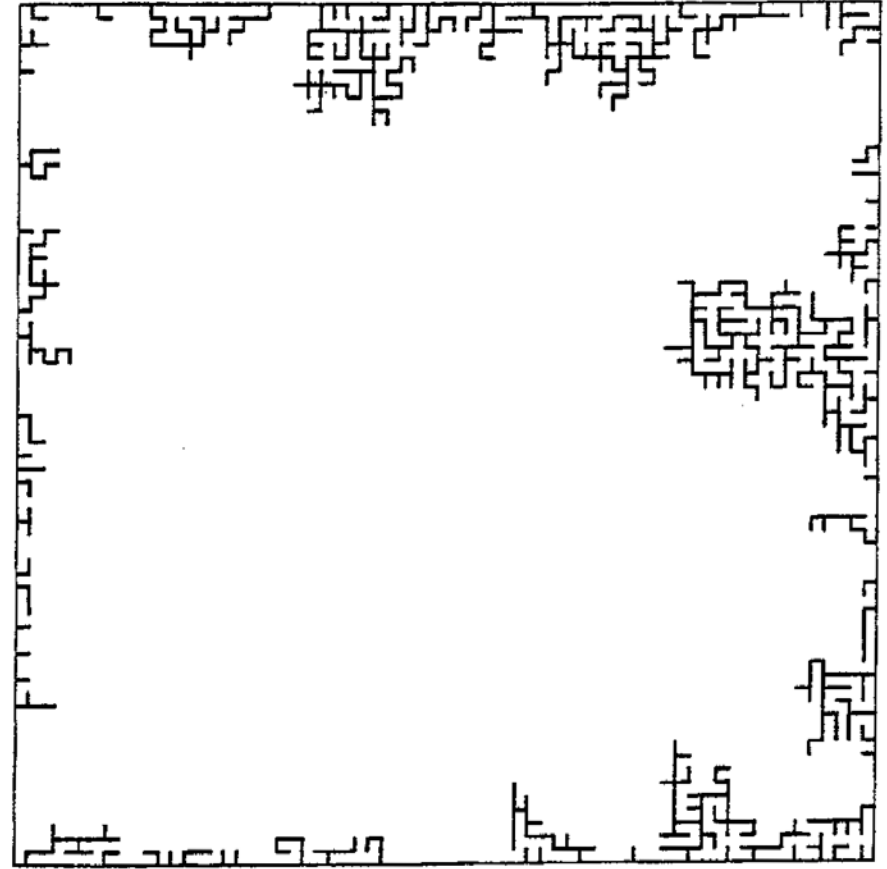
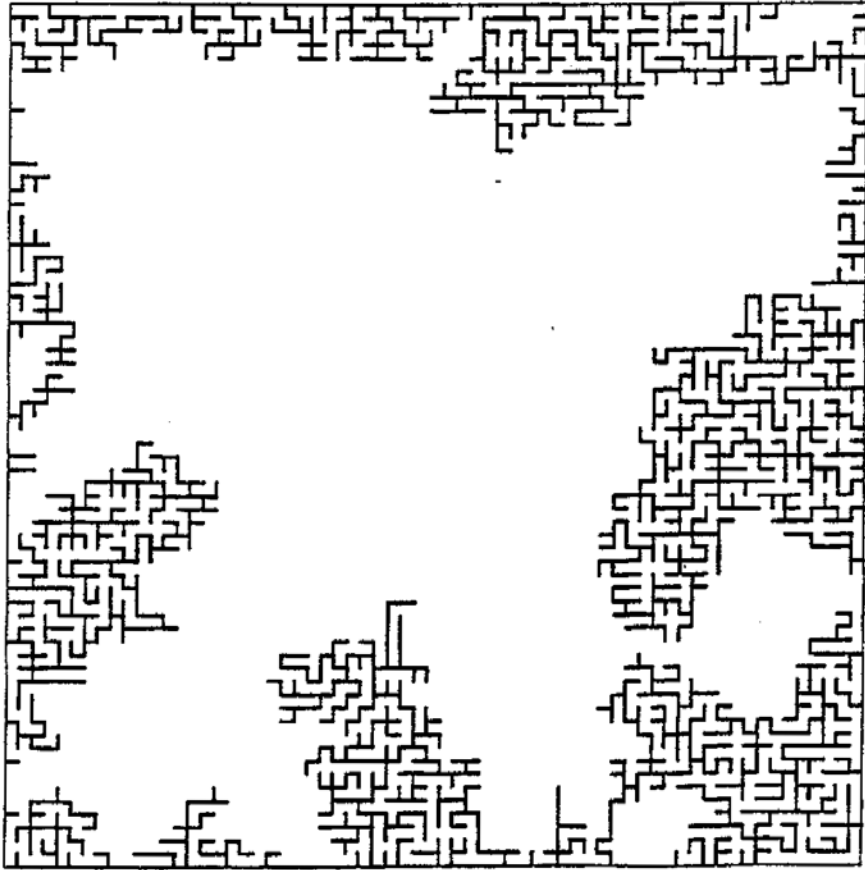








These figures were given by S. S. Manna.



These figures were given by S. S. Manna.

ASM の定常状態



全域木 (spanning tree) のミクロカノニカル分布

妄想

- 全域木のカノニカル分布やグランドカノニカル分布は?
⇒ 再帰的配置は (大縮退した) 基底状態のようなもの.
この (エネルギーゼロの) 等エネルギー面しかない?
- ASM の過渡的配置 $h \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{R}$, あるいは不安定配置 $\eta \in \mathbb{N}_0^{|\Lambda|} \setminus \mathcal{S}$ の幾何構造は?
⇒ 非平衡統計力学の定式化のよい例?

4. 砂山(ASP)-全域木(spanning tree) の局所-大域双対性

- 次のような対応があることを説明した：

ASM の \mathcal{R} の要素である再帰的配置 \iff 全域木

ASM の定常状態 \iff 全域木の一様分布

- しかしながら …

ASM の定常状態での
局所的な物理量の
計算

\iff

大域的な制限を満たす
大域木の
数え上げ

局所的

\iff

大域的

例 1

- (定常状態での) 1 格子点上の砂山高さ分布関数

$$\begin{aligned} p_k(\mathbf{x}) &= \text{定常状態で格子点 } \mathbf{x} \text{ 上の砂山の高さが } k \text{ である割合} \\ &= \langle \delta_{h(\mathbf{x})k} \rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots, h_c - 1. \end{aligned}$$

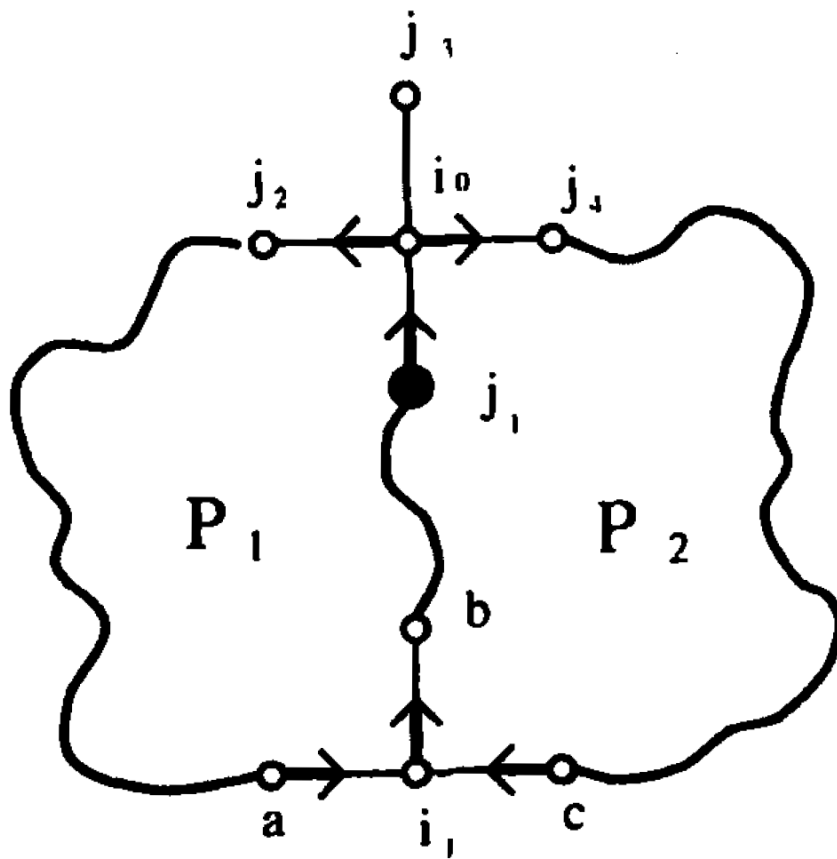
- 2 次元 BTW 模型 ($h_c = 4$) を考える.
格子サイズ $L \rightarrow \infty$ をとると, p_k は \mathbf{x} に依存しなくなる.
- p_0 は大域木の局所的な数え上げで求められる :

$$p_0 = \frac{2(\pi - 2)}{\pi^3} \simeq 0.07363.$$

Majumdar, S. N., Dhar, D.: J. Phys. A: Math. Gen. **24**, L357-L362 (1991).

- しかし, $p_k, k = 1, 2, 3$ には, 大局的な制限を課した大域木の数え上げをする必要がある :
Prietzhev の Θ グラフ.

Prietzhev, V. B.: J. Stat. Phys. 74, 955-979 (1994)



This figure is a copy of Fig.7 in Prietzhev (1994) (J. Stat. Phys. 74, 955-979).

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2\pi} - \frac{2}{\pi^2} + \frac{12}{\pi^3} + \frac{I_1}{4}, \\
p_2 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4\pi} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^3} - \frac{I_1}{2} - \frac{3I_2}{32}, \\
p_3 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^3} + \frac{I_1}{4} + \frac{3I_2}{32}.
\end{aligned}$$

ここで、 $I_\nu, \nu = 1, 2$ は次で与えられる定積分,

$$I_\nu = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} d\alpha_1 \int_0^{2\pi} d\alpha_2 \int_0^{2\pi} d\beta_1 \int_0^{2\pi} d\beta_2 \frac{i \sin \beta_1 \det(M_\nu)}{D(\alpha_1, \beta_1) D(\alpha_2, \beta_2) D(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)},$$

ただし,

$$D(\alpha, \beta) = 2 - \cos \alpha - \cos \beta,$$

であり, また, M_1, M_2 は次の行列である:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & e^{i\alpha_2} & 1 \\ 3 & e^{i(\beta_1+\beta_2)} & e^{i(\alpha_2-\beta_2)} & e^{-i\beta_1} \\ 4/\pi - 1 & e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} & 1 & e^{-i\alpha_1} \\ 4/\pi - 1 & e^{-i(\alpha_1+\alpha_2)} & e^{2i\alpha_2} & e^{i\alpha_1} \end{pmatrix}, \\
M_2 &= \begin{pmatrix} e^{i\beta_2} & e^{-i(\alpha_1+\alpha_2)-i(\beta_1+\beta_2)} & e^{i\beta_1} \\ e^{-i\alpha_2} & 1 & e^{-i\alpha_1} \\ e^{i\alpha_2} & e^{-2i(\alpha_1+\alpha_2)} & e^{i\alpha_1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

例 2

- (定常状態での) 2 点の砂山高さ相関関数

予稿にはすこし詳しく書いたので、本講演では述べないことにする。

計算は恐ろしく面倒

2 次元 BTW モデルの結果は、対数共形場理論 ($c = -2$) の予想と一致

その後、前述の Priezzhev の砂山高さ分布の多重積分は、以下の値を与えることが示された (完全な証明にはなっていないようだが) :

Jeng, M., Piroux, G., Ruelle, P.: J. Stat. Mech. P10015 (2006).

$$p_0 = \frac{2}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^3} = 0.07363\dots,$$

$$p_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} - \frac{3}{\pi^2} + \frac{12}{\pi^3} = 0.17389\dots,$$

$$p_2 = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} = 0.30629\dots,$$

$$p_3 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^3} = 0.44617\dots.$$

これらの値より、平均の高さは次で与えられる :

$$\langle h \rangle = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3 = \frac{17}{8} = 2.125.$$

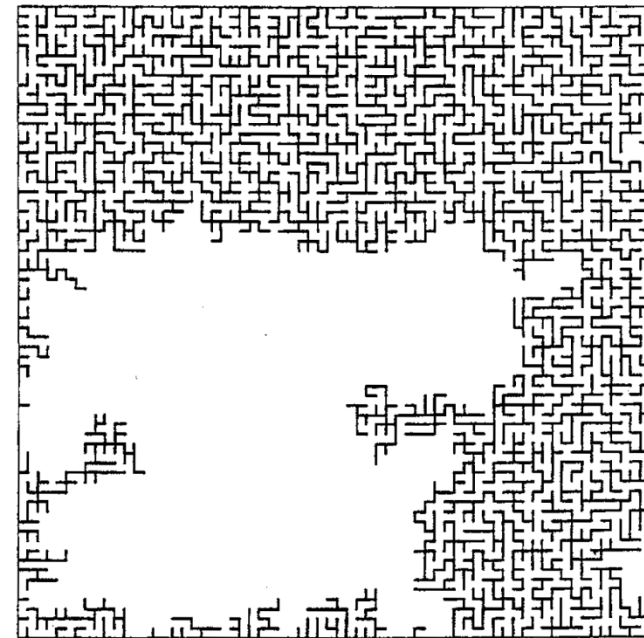
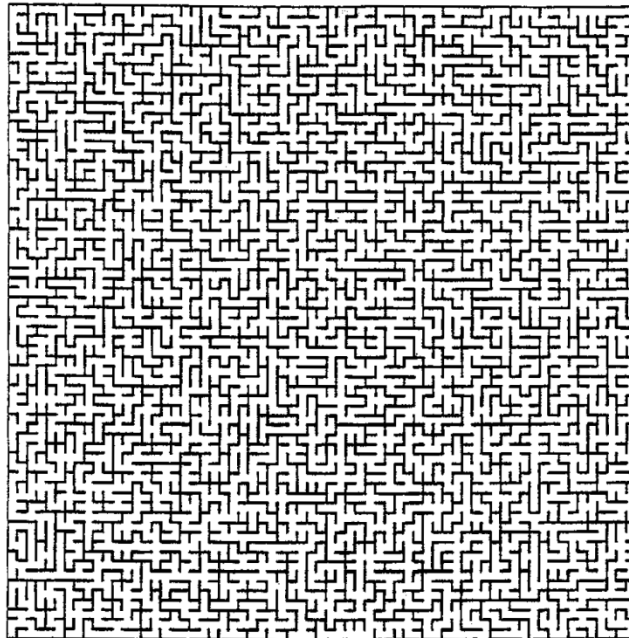
- この対応を用いて、ダイナミクス（プロセス）を次のものに置き換えて解析している：
 - ⇒ 全域木の静的な数え上げ問題（Priezzhev）
 - ⇒ $c = -2$ 共形場理論（対数共形場理論）（P. Ruelle など）
 - ⇒ Temperley 対応により dimer 数え上げ問題に翻訳
 - ⇒ さらに、Lieb 対応で量子スピン系に変換して転送行列を用いる
(Brankov, Poghosyan など)

5. 可換砂山模型 (ASP) 研究が 教えること

再帰的配置 $h \in \mathcal{R}$ の特徴

- 高すぎない ... 高すぎると不安定化 $h \rightarrow \eta \notin \mathcal{R}$
 - 低すぎない ... 安定ではあるが過渡的配置になってしまう.
過渡的配置は「さらなる堆積を待っている状態」
 - $h \in \mathcal{R}$ は、安定配置だが局所的な摂動で不安定化し、
なだれを引き起こす「一触即発の状態」.
あるいは、「要注意配置」と呼べるかもしれない.
- この「要注意配置」を、摂動を加えて実際になだれを起こすことなく、
(未然に) 見分けることができるか？

- この「要注意配置」を，摂動を加えて実際になだれを起こすことなく，（未然に）見分けることができるか？



These figures were given by S. S. Manna.

- 「砂山-全域木対応」は、『対応する tree 構造（ある種のネットワーク構造）が全域を覆っているか』で判定できることを意味している。

可換砂山模型

再帰的配置の統計力学

全域木表示（幾何学的構造）

現実のなだれ現象

「要注意配置」のアンサンブル？

ストレスのネットワーク構造？