1 次元 2 状態量子ウォークの数理

香取研究室　　星谷友之

参考文献・画像引用

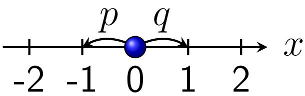
今野紀雄『量子ウォーク』
（森北出版，2014）

量子ウォークとは

ランダムウォークの量子的な数理モデル

21 世紀になって活発に研究され始めた
新しい分野

古典ランダムウォーク



$S_n = x$：ランダムウォーカーが時刻 n に場所 x に存在

$S_n = x$（左に l 回，右に m 回進む）となる確率

$$\mathcal{P}(S_n = x) = \binom{n}{l} p^l q^m$$

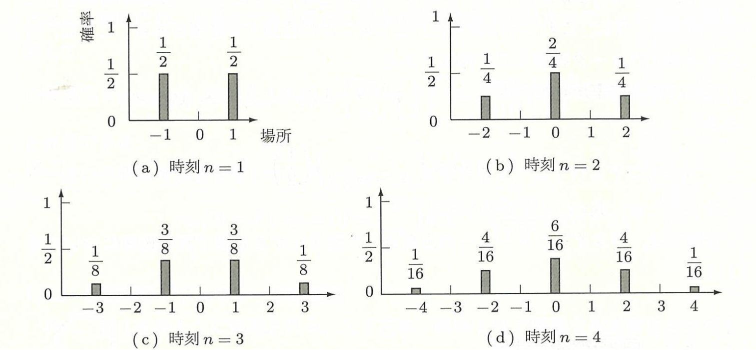
対称ランダムウォーク

$$p = q = \tfrac{1}{2}$$

$S_n = x$ となる確率

$$\mathcal{P}(S_n = x) = \binom{n}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^l \left(\frac{1}{2}\right)^m = \binom{n}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$n = 1, 2, 3, 4$ の
対称ランダムウォークの確率分布



どの場合も出発点である原点付近が確率最大

カイラリティ

量子ウォーカーは
カイラリティと呼ばれる複数の状態を
抱えながら移動していく

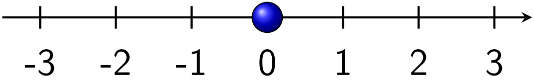
$\Rightarrow$ 状態の重ね合わせ

$$\begin{cases} \text{カイラリティが 2 つ} \Rightarrow \text{2 状態} \\ \text{カイラリティが 3 つ} \Rightarrow \text{3 状態} \end{cases}$$

量子ウォークの初期状態（$n = 0$）

例えば量子ウォーカーが原点にしか存在しない場合

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



量子ビット

量子ウォークの時間発展を決定する 1 つ目の量

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \left|\mathbf{L}\right\rangle + \beta \left|\mathbf{R}\right\rangle$$

α, β：確率振幅，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，$\begin{cases} \left|\mathbf{L}\right\rangle : \text{左向きのカイラリティ} \\ \left|\mathbf{R}\right\rangle : \text{右向きのカイラリティ} \end{cases}$

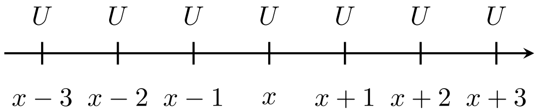
$$\begin{cases} \text{左向き状態である確率} : |\alpha|^2 \\ \text{右向き状態である確率} : |\beta|^2 \end{cases}$$

量子コイン U

量子ウォークの時間発展を決定する 2 つ目の量

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2), \qquad UU^* = U^*U = I_2$$

$$|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1\ ,\ a\bar{b} + c\bar{d} = 0\ ,\ |\mathbf{det}\, U| = 1$$

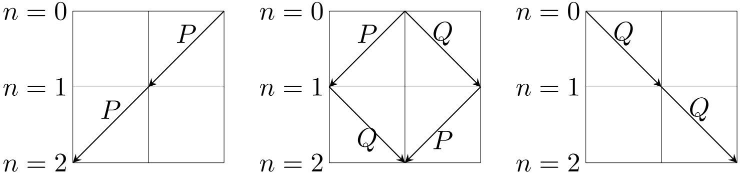


U を P と Q に分解 $\quad \Rightarrow \quad U = P + Q$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} P : \text{左へ向かう重み} \\ Q : \text{右へ向かう重み} \end{cases}$$

例えば $n = 2$ の場合



P^2 $\qquad$ $QP + PQ\ (\neq 2PQ)$ $\qquad$ Q^2

$\Xi_2(2,0) = P^2$ $\qquad$ $\Xi_2(1,1) = QP + PQ$ $\qquad$ $\Xi_2(0,2) = Q^2$

$\Rightarrow \Xi_n(l, m)$：左に l，右 m 進む重みの総和

$X_n = x$：量子ウォーカーが時刻 n に場所 x に存在

時刻 n，場所 x での確率振幅：$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \Psi_n^{\mathbf{L}}(x) \\ \Psi_n^{\mathbf{R}}(x) \end{pmatrix}$

$$\Psi_n(x) = \Xi_n(l, m)\varphi$$

$X_n = x$ となる確率は

$$\mathcal{P}(X_n = x) = \left\|\Psi_n(x)\right\|^2$$

$$= \left|\Psi_n^{\mathbf{L}}(x)\right|^2 + \left|\Psi_n^{\mathbf{R}}(x)\right|^2 = \left\|\Xi_n(l, m)\varphi\right\|^2$$

量子コイン $U = H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ アダマールゲート

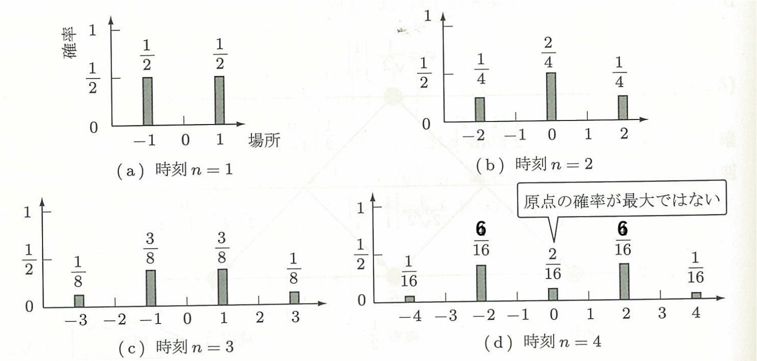
量子コインがアダマールゲートの量子ウォーク

$\Rightarrow$ アダマールウォーク

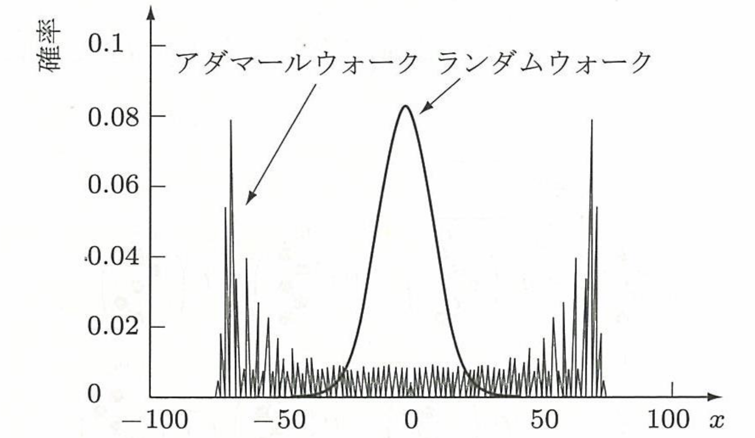
原点での量子ビット　$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 対称な確率分布

$n = 1, 2, 3, 4$ のアダマールウォークの確率分布



$$\begin{cases} n = 3 \text{ までは対称ランダムウォーク確率分布と同じグラフ} \\ \color{red}{n = 4} \text{ から振舞が変化} \end{cases}$$



時刻 100 でのアダマールウォークとランダムウォークの確率分布

量子ウォークの確率分布は複雑に振動する

ランダムウォークには見られない量子ウォーク特有の２つの性質

- 線形的広がり

$$
標準偏差\ \sigma(n) \sim \begin{cases} \sqrt{n} & \text{ランダムウォーク} \Rightarrow \text{拡散的に広がる} \\ n & \text{量子ウォーク} \Rightarrow \text{線形的に広がる} \end{cases}
$$

- 局在化

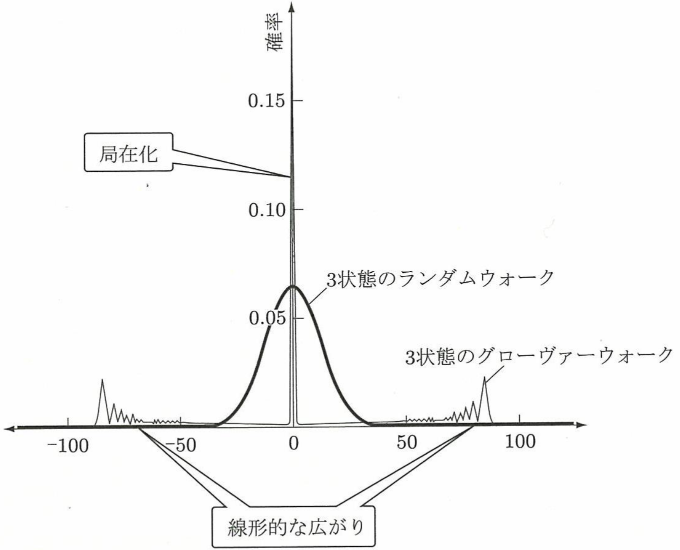
原点を出発し，時刻 n で原点に戻る再帰確率を
$r_n(0) = \mathcal{P}(X_n = 0)$ とすると

$$
\lim_{n\to\infty} r_n(0) > 0
$$

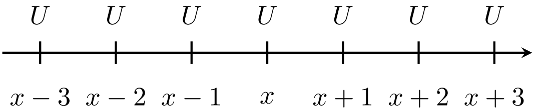
奇数時刻では原点に戻れないから $r_{2n+1}(0) = 0$

$$
\lim_{n\to\infty} r_{2n}(0) > 0
$$

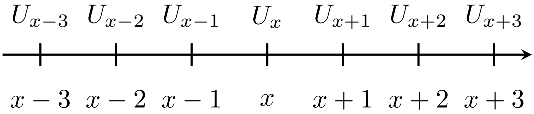
$\Rightarrow$ 十分に時間が大きくなっても原点に留まり続ける


確率
0.15
0.10
0.05
局在化
3状態のランダムウォーク
3状態のグローヴァーウォーク
−100
−50
0
50
100
線形的な広がり

空間依存型量子ウォーク



量子コインは場所に依存せず，空間的に一様
（今まで考えていたモデル）

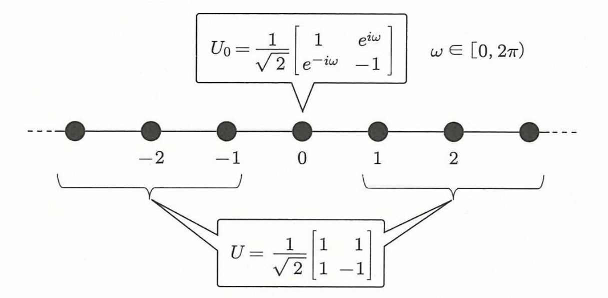


量子コインは場所によって異なり，空間的に非一様

$$U_x = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix} \qquad a_x, b_x, c_x, d_x \in \mathbb{C}$$

一般的な場合の解析は難しいので，以下のモデルを採用

原点の量子コインだけを変える操作を施す



$$U = \begin{cases} U_0(\omega) & x = 0 \\ H = U_0(0) & x \neq 0 \end{cases}$$

原点の量子コインにのみ位相 ω の偏りが存在する
one defect（一欠陥）モデル

$\omega = 0$ の場合（何の操作も施していない場合）$\Rightarrow$ アダマールウォーク

アダマールウォークの原点への再帰確率を $r_{2n}^{(\mathbf{H})}(0)$ とすると

$$\begin{cases} r_0^{(\mathbf{H})}(0) = 1 \\ r_{10}^{(\mathbf{H})}(0) = 0.07031... \\ r_{20}^{(\mathbf{H})}(0) = 0.03028... \\ .... \end{cases}$$

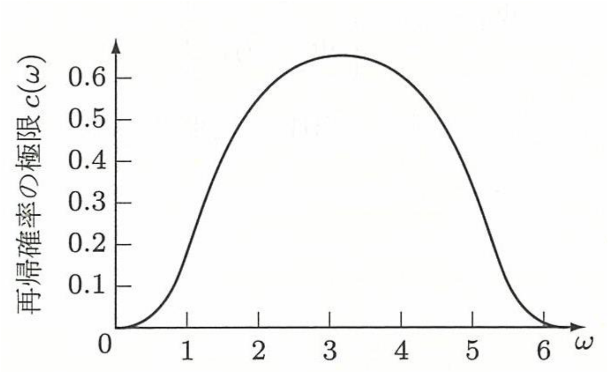
$$\lim_{n\to\infty} r_{2n}^{(\mathbf{H})}(0) = 0$$

アダマールウォークは
局在化を示さない

しかし $\omega \neq 0$ の場合（操作を施した場合）
$\Rightarrow$ 空間依存型量子ウォーク

原点への再帰確率を $r_{2n}(0)$ とすると

$$\lim_{n \to \infty} r_{2n}(0) = \left(\frac{2(1 - \cos\omega)}{3 - 2\cos\omega} \right)^2 = c(\omega)$$



グラフより $\omega \neq 0$ すなわち $\omega \in (0, 2\pi)$ ならば

$$c(\omega) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} r_{2n}(0) > 0$$

局在化を示す

結論

原点の量子コインを変えただけで,
すなわち空間が少しでも非一様に
なっただけで，状態が一変.

非局在化 $\Rightarrow$ 局在化