転送行列法

香取研究室　樋口将

- N個のスピン鎖をもつ1次元イジングモデルを考える。

ハミルトニアン $H= -J\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\sigma_{i+1} - B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i$

※ J：結合定数、B：外磁場

周期的境界条件　$\sigma_i \equiv \sigma_{N+i}$

- 転送行列法は、スピン配置の和を行列の積で書けるので、分配関数は以下のようになる。$Z_N=\sum_{\{\sigma\}} <\sigma_1|V(\sigma_1,\sigma_2)|\sigma_2><\sigma_2|V(\sigma_2,\sigma_3)|\sigma_3>\cdots<\sigma_N|V(\sigma_N,\sigma_1)|\sigma_1>$

※ $<\sigma\,|V(\sigma,\sigma')|\,\sigma'>=\exp[k\sigma\sigma'+h\frac{(\sigma+\sigma')}{2}]$,

$k=\beta J$, $h=\beta B$

- Vは2×2行列で表される。

※　スピン基底を以下のように定義する。

$$|\sigma_i>=\begin{cases}|+>=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdots\sigma_i=+1\text{のとき}\\ |->=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cdots\sigma_i=-1\text{のとき}\end{cases}$$

$$<\sigma_i|=\begin{cases}<+|\;=(1\;0)\cdots\sigma_i=+1\text{のとき}\\ <-|\;=(0\;1)\cdots\sigma_i=-1\text{のとき}\end{cases}$$

すると、行列Vを下のように表すことができる。

$$V=\begin{pmatrix}<+|e^{\beta H}|+> & <+|e^{\beta H}|-> \\ <-|e^{\beta H}|+> & <-|e^{\beta H}|->\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{k+h} & e^{-k}\\ e^{-k} & e^{k-h}\end{pmatrix}$$

ブラケットの完全性　$\sum_{\sigma_i=\pm1}|\sigma_i><\sigma_i|=E$ を用いると、

$Z_N=\sum_{\sigma_i=\pm1}<\sigma_1|V^N|\sigma_1>$

$\quad=<+|V^N|+>+<-|V^N|->$

$\quad=\mathrm{Tr}\,V^N$

トレースは基底の選び方によらないので、Vが対角行列になるようにユニタリ行列Uを用いて、Vの固有値λ_+,λ_-が対角成分に並ぶように変換する。

$U^{-1}VU=D=\begin{pmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{pmatrix}$,※ $U=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$, $\lambda_+>\lambda_-$

対角行列Dを用いてTr V^Nを書くと以下のようになる。

$\mathrm{Tr}\,V^N=\mathrm{Tr}\,UU^{-1}V^N=\mathrm{Tr}\,U^{-1}V^NU=\mathrm{Tr}\,D=\lambda_++\lambda_-$

固有値λ_+,λ_-を求めるために固有方程式$|V-\lambda E|=0$を解く。

$|V-\lambda E|=\begin{vmatrix}e^{k+h}-\lambda & e^{-k}\\ e^{-k} & e^{k-h}-\lambda\end{vmatrix}=(e^{k+h}-\lambda)(e^{k-h}-\lambda)-e^{-2k}=0$

$\lambda_\pm=e^k\cosh h\pm\sqrt{e^{2k}\cosh^2h-2\sinh(2k)}$

スピン一つあたりの自由エネルギーFを考える。

$F=-\frac{1}{\beta N}\ln({\lambda_+}^N+{\lambda_-}^N)$

$\quad=-\frac{1}{\beta}\{\ln\lambda_++\frac{1}{N}\ln[1+(\frac{\lambda_-}{\lambda_+})^N]\}$

N→∞をとると、$F=-\frac{1}{\beta}\ln\lambda_+$ となるので、

$F=-\frac{1}{\beta}\ln\{e^k\cosh h+\sqrt{e^{2k}\cosh^2h-2\sinh(2k)}\}$

自由エネルギーFをBで微分することで磁化の平均を求めることができる。

$$\langle\sigma\rangle=\frac{\partial F}{\partial B}=-\frac{1}{\beta}\frac{e^k\beta\sinh h+\frac{1}{2}\{e^{2k}\cosh^2h-2\sinh(2k)\}^{-\frac{1}{2}}e^{2k}2\beta\cosh h\sinh h}{e^k\cosh h+\sqrt{e^{2k}\cosh^2h-2\sinh(2k)}}$$

$$=-\frac{e^k\sinh h\times2\sinh(2k)}{2\sinh(2k)\sqrt{e^{2k}\cosh^2h-2\sinh(2k)}}=-\frac{e^k\sinh h}{\sqrt{e^{2k}\cosh^2h-2\sinh(2k)}}$$

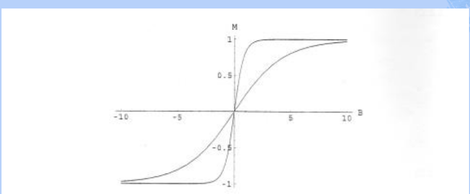

Fig. 2.7 *Magnetization versus the magnetic field B, for different values of the temperature.*

Tが有限のときは相転移を起こさないが、T→0をとると磁化は不連続となる。式で表すと、

$$\langle\sigma\rangle=\varepsilon(B)\quad ※\varepsilon(x)=\begin{cases}1 & (\text{if } x>0)\\ 0 & (\text{if } x=0)\\ -1 & (\text{if } x<0)\end{cases}$$

スピンの相関関数の計算

相関子を以下のようにとる。

$\langle\sigma_1\sigma_{r+1}\rangle={Z_N}^{-1}\sum_{\{\sigma\}}\sigma_1V_{(\sigma_1,\sigma_2)}\dots\sigma_{r+1}V_{(\sigma_{r+1},\sigma_{r+2})}\cdots V_{(\sigma_N,\sigma_1)}$

$S_{\sigma,\sigma'}=\sigma\delta_{\sigma,\sigma'}$を満たす対角行列$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$を導入して書き換えると以下のようになる。

$\langle\sigma_1\sigma_{r+1}\rangle={Z_N}^{-1}\,\mathrm{Tr}\,(SV^rSV^{N-r})$

また、σ の期待値は、$\langle\sigma\rangle={Z_N}^{-1}\mathrm{Tr}\,SV^N$ であたえられる。

SにVを対角化するユニタリ行列を用いることで、

$U^{-1}SU=\begin{pmatrix}cos2\varphi & -sin2\varphi\\ -sin2\varphi & -cos2\varphi\end{pmatrix}$

$\langle\sigma_1\sigma_{r+1}\rangle$を対角したVで表すために各行列の間に$UU^{-1}=E$を挟み込んで、

$\langle\sigma_1\sigma_{r+1}\rangle$

$={Z_N}^{-1}\times$

$$\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix}cos2\varphi & -sin2\varphi\\ -sin2\varphi & -cos2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{\lambda_+}^r & 0\\ 0 & {\lambda_-}^r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}cos2\varphi & -sin2\varphi\\ -sin2\varphi & -cos2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{\lambda_+}^{N-r} & 0\\ 0 & {\lambda_-}^{N-r}\end{pmatrix}\right\}$$

$={Z_N}^{-1}\left\{({\lambda_+}^N+{\lambda_-}^N)cos^22\varphi+({\lambda_+}^r{\lambda_-}^{N-r}+{\lambda_+}^{N-r}{\lambda_-}^r)sin^22\varphi\right\}$

※　N→∞をとる

$\to\ cos^22\varphi+sin^22\varphi\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^r$

同様に⟨σ⟩も計算し、

$\langle\sigma\rangle={Z_N}^{-1}Tr\left\{\begin{pmatrix}cos2\varphi & -sin2\varphi\\ -sin2\varphi & -cos2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{\lambda_+}^N & 0\\ 0 & {\lambda_-}^N\end{pmatrix}\right\}$

$={Z_N}^{-1}\{({\lambda_+}^N-{\lambda_-}^N)cos2\varphi\}$

$=\frac{{\lambda_+}^N-{\lambda_-}^N}{{\lambda_+}^N+{\lambda_-}^N}cos2\varphi\ =\frac{1-\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^N}{1+\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^N}cos2\varphi\to cos2\varphi$

※N→∞をとった

したがって2点における相関関数は、

$G_c{}^{(2)}(r)=\langle\sigma_i\sigma_{i+r}\rangle-\langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle$

$\qquad=cos^22\varphi+sin^22\varphi\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^r-cos^2\varphi$

$\qquad=sin^22\varphi\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^r$

参考文献

・Statistical Field Theory(2010) Giuseppe Mussardo p51−p57

・ときわ台学（1次元イジングモデル）

http://f-denshi.com/000okite/100tokei/t121.html