

# 2次元量子ウォークの ボソンの及びフェルミオンの振舞

○星谷 友之 香取眞理

中央大学理工学部

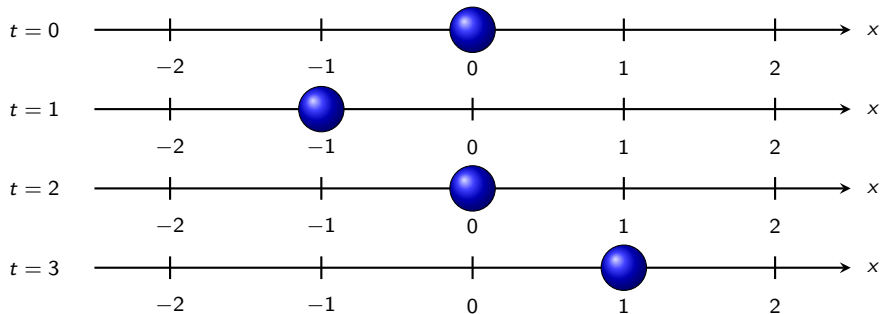
2016年9月14日

本研究では、2次元量子ウォークを扱うので、  
最初に、1次元量子ウォークを導入する。

(参考) 今野紀雄. 量子ウォーク. 森北出版. 2014.

離散化された空間・時間

$$\begin{cases} x = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\ t = \{0, 1, 2, \dots\} \end{cases}$$

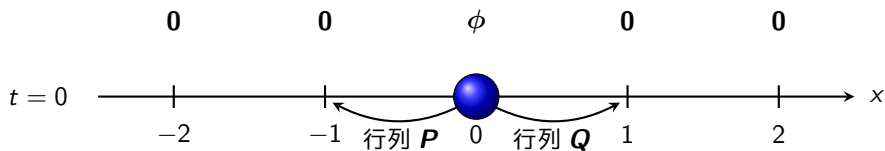


## 確率振幅ベクトル

$$\psi(x, t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, t) \\ \varphi_2(x, t) \end{pmatrix} = \varphi_1(x, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi_2(x, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  という 2 つの状態の重ね合わせを表す

## 初期状態

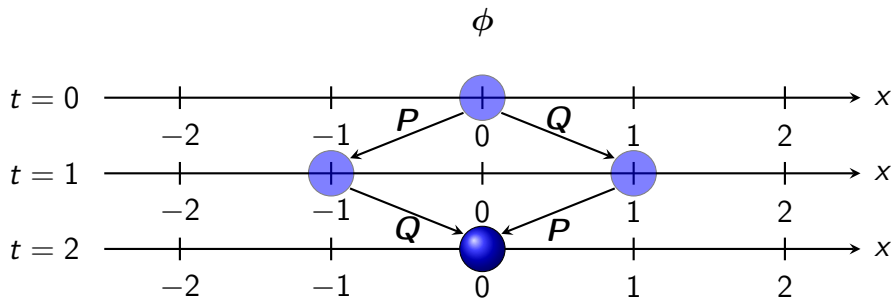


$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \phi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, & |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 & x = 0 & \text{量子ビット} \\ \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & x \neq 0 & \end{cases}$$

$$P + Q \in U(2) \quad \text{量子コイン}$$

## (例) 粒子が $t = 2$ に原点に存在する確率

初期状態で粒子は原点に存在



$$\psi(0, 2) = \begin{pmatrix} \varphi_1(0, 2) \\ \varphi_2(0, 2) \end{pmatrix} = (QP + PQ)\phi$$

確率  $\|\psi(0, 2)\|^2 = |\varphi_1(0, 2)|^2 + |\varphi_2(0, 2)|^2 = \|(QP + PQ)\phi\|^2$

最も標準的なモデルである、対称なアダマールウォークの量子ビット、量子コイン

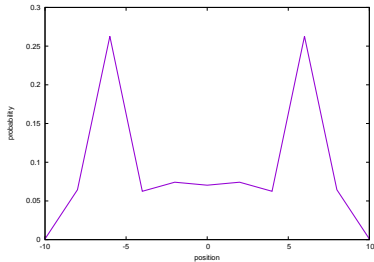
$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{確率} \quad \|\psi(0,2)\|^2 = \|(\mathbf{QP} + \mathbf{PQ})\phi\|^2 = \frac{2}{4}$$

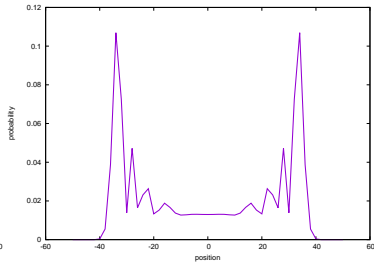
| $t \backslash x$ | -5             | -4             | -3              | -2             | -1             | 0              | 1              | 2              | 3               | 4              | 5              |
|------------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| 0                | 0              | 0              | 0               | 0              | 0              | 1              | 0              | 0              | 0               | 0              | 0              |
| 1                | 0              | 0              | 0               | 0              | $\frac{1}{2}$  | 0              | $\frac{1}{2}$  | 0              | 0               | 0              | 0              |
| 2                | 0              | 0              | 0               | $\frac{1}{4}$  | 0              | $\frac{2}{4}$  | 0              | $\frac{1}{4}$  | 0               | 0              | 0              |
| 3                | 0              | 0              | $\frac{1}{8}$   | 0              | $\frac{3}{8}$  | 0              | $\frac{3}{8}$  | 0              | $\frac{1}{8}$   | 0              | 0              |
| 4                | 0              | $\frac{1}{16}$ | 0               | $\frac{6}{16}$ | 0              | $\frac{2}{16}$ | 0              | $\frac{6}{16}$ | 0               | $\frac{1}{16}$ | 0              |
| 5                | $\frac{1}{32}$ | 0              | $\frac{11}{32}$ | 0              | $\frac{4}{32}$ | 0              | $\frac{4}{32}$ | 0              | $\frac{11}{32}$ | 0              | $\frac{1}{32}$ |

$t = 4$  から重ね合わせによる効果が現れる

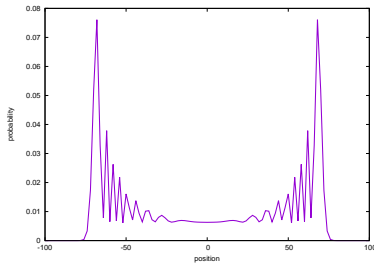
$t = 10$



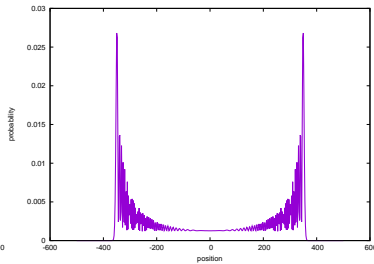
$t = 50$



$t = 100$



$t = 500$



確率分布は  $t \rightarrow \infty$  においても振動

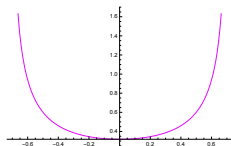
しかし、今野によって、擬速度  $\frac{X(t)}{t}$  のモーメントは  $t \rightarrow \infty$  において収束することが証明された

そこで、擬速度のモーメントを計算し、長時間極限を考える

対称なアダマルウォークを例とすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left( \frac{X(t)}{t} \right)^\alpha \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x^\alpha f^{\text{SH}}(v_x) \quad \alpha \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$f^{\text{SH}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}, x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



対称なアダマルウォークの密度関数  $f^{\text{SH}}(x)$  (今野関数)

## 本研究

2つの独立な1次元量子ウォークから2次元量子ウォークを作り、ボソン・フェルミオンという2つのパターンの確率振幅を導入する。さらに、1次元の場合と同様に、モーメントを計算し、長時間極限をとることによって、密度関数を求める。

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left( \frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t} \right)^\alpha \left( \frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t} \right)^\beta + \left( \frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t} \right)^\beta \left( \frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t} \right)^\alpha \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \frac{v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha}{2} \hat{C}_{\mathbf{P}}(v_x, v_y) \quad \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

・  $x$  方向と  $y$  方向で共通の量子ビット, 量子コイン  $\rightarrow$  同種粒子

・ 確率振幅ベクトル

$$\psi(x, t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, t) \\ \varphi_2(x, t) \end{pmatrix}, \quad \psi(y, t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y, t) \\ \varphi_2(y, t) \end{pmatrix}$$

・ 2つの確率振幅を組み合わせる

$$\Psi_{\mathbf{P}}(x, y, t) = \varphi_1(x, t) \varphi_2(y, t) \pm \varphi_2(x, t) \varphi_1(y, t)$$

プラス  $\rightarrow x$  と  $y$  の交換に対し,  $\Psi_{\mathbf{P}}(x, y, t)$  の符号は不変  $\rightarrow$  ボソン ( $\mathbf{P} = \mathbf{B}$ )

マイナス  $\rightarrow x$  と  $y$  の交換に対し,  $\Psi_{\mathbf{P}}(x, y, t)$  の符号はマイナス1倍  $\rightarrow$  フェルミオン ( $\mathbf{P} = \mathbf{F}$ )



2方向の擬速度  $\frac{X(t)}{t}$ ,  $\frac{Y(t)}{t}$  に関する, 結合モーメントを計算

同種粒子系のため, オブザーバブルは粒子の入れ替えに対して対称化

$$\begin{aligned} & \left\langle \left( \frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t} \right)^\alpha \left( \frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t} \right)^\beta + \left( \frac{X_{\mathbf{P}}(t)}{t} \right)^\beta \left( \frac{Y_{\mathbf{P}}(t)}{t} \right)^\alpha \right\rangle \\ &= \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2} \left\{ \left( \frac{x}{t} \right)^\alpha \left( \frac{y}{t} \right)^\beta + \left( \frac{x}{t} \right)^\beta \left( \frac{y}{t} \right)^\alpha \right\} |\Psi_{\mathbf{P}}(x, y, t)|^2 \\ &= \sum_{(x,y) \in \mathbb{Z}^2} \left\{ \left( \frac{x}{t} \right)^\alpha \left( \frac{y}{t} \right)^\beta + \left( \frac{x}{t} \right)^\beta \left( \frac{y}{t} \right)^\alpha \right\} \\ & \quad \times |\varphi_1(x, t) \varphi_2(y, t) \pm \varphi_2(x, t) \varphi_1(y, t)|^2 \end{aligned}$$

フーリエ変換によって, 波数空間の確率振幅を導入

$$\begin{cases} \varphi_1(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} e^{ik_x x} \hat{\varphi}_1(k_x, t) \\ \varphi_2(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} e^{ik_x x} \hat{\varphi}_2(k_x, t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\alpha \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\beta + \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\beta \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\alpha \right\rangle \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \{ \hat{\varphi}_1(k_x, t)^* \hat{\varphi}_2(k_y, t)^* \pm \hat{\varphi}_2(k_x, t)^* \hat{\varphi}_1(k_y, t)^* \} \\
&\quad \times \left\{ \left( \frac{i}{t} \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^\alpha \left( \frac{i}{t} \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^\beta + \left( \frac{i}{t} \frac{\partial}{\partial k_x} \right)^\beta \left( \frac{i}{t} \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^\alpha \right\} \\
&\quad \{ \hat{\varphi}_1(k_x, t) \hat{\varphi}_2(k_y, t) \pm \hat{\varphi}_2(k_x, t) \hat{\varphi}_1(k_y, t) \}
\end{aligned}$$

ユニタリ行列  $e^{-ik_x} \mathbf{Q} + e^{ik_x} \mathbf{P}$  に対して、固有値と固有ベクトルを考える

- ・固有値  $\lambda(k_x) = e^{i\theta(k_x)}$ ,  $\mu(k_x) = e^{i\varphi(k_x)}$
- ・固有ベクトル  $\mathbf{l}(k_x)$ ,  $\mathbf{m}(k_x)$

この行列を対角化することで、波数空間の確率振幅を、固有値と固有ベクトルを用いて表す

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_1(k_x, t) = \lambda(k_x)^t (\mathbf{l}(k_x)^\dagger \phi) h_1(k_x) + \mu(k_x)^t (\mathbf{m}(k_x)^\dagger \phi) m_1(k_x) \\ \hat{\varphi}_2(k_x, t) = \lambda(k_x)^t (\mathbf{l}(k_x)^\dagger \phi) h_2(k_x) + \mu(k_x)^t (\mathbf{m}(k_x)^\dagger \phi) m_2(k_x) \end{cases}$$

時間依存性は固有値のみに現れることがわかる

$$\left\langle \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\alpha \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\beta + \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\beta \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\alpha \right\rangle$$

t を含まない積分

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\alpha \left( \frac{i}{\lambda(k_y)} \frac{d\lambda(k_y)}{dk_y} \right)^\beta + \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\beta \left( \frac{i}{\lambda(k_y)} \frac{d\lambda(k_y)}{dk_y} \right)^\alpha \right\} \\ |I(k_x)^\dagger \phi|^2 |I(k_y)^\dagger \phi|^2 \{h_1(k_x)^* h_2(k_y)^* \pm h_2(k_x)^* h_1(k_y)^*\} \{h_1(k_x) h_2(k_y) \pm h_2(k_x) h_1(k_y)\} \\ + \dots$$

振動項を含む積分

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\alpha \left( \frac{i}{\mu(k_y)} \frac{d\mu(k_y)}{dk_y} \right)^\beta + \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\beta \left( \frac{i}{\mu(k_y)} \frac{d\mu(k_y)}{dk_y} \right)^\alpha \right\} \\ e^{i\{-\theta(k_y) + \varphi(k_y)\}t} |I(k_x)^\dagger \phi|^2 (I(k_y)^\dagger \phi)^* (m(k_y)^\dagger \phi) \\ \{h_1(k_x)^* h_2(k_y)^* \pm h_2(k_x)^* h_1(k_y)^*\} \{h_1(k_x) m_2(k_y) \pm h_2(k_x) m_1(k_y)\} \\ + \dots$$

$$+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right)$$

$t \rightarrow \infty$  とする

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\alpha \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\beta + \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\beta \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\alpha \right\rangle$$

$t$  を含まない積分

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\alpha \left( \frac{i}{\lambda(k_y)} \frac{d\lambda(k_y)}{dk_y} \right)^\beta + \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\beta \left( \frac{i}{\lambda(k_y)} \frac{d\lambda(k_y)}{dk_y} \right)^\alpha \right\} \\ |I(k_x)^\dagger \phi|^2 |I(k_y)^\dagger \phi|^2 \{h_1(k_x)^* h_2(k_y)^* \pm h_2(k_x)^* h_1(k_y)^*\} \{h_1(k_x) h_2(k_y) \pm h_2(k_x) h_1(k_y)\} \\ + \dots$$

振動項を含む積分

$$+ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\alpha \left( \frac{i}{\mu(k_y)} \frac{d\mu(k_y)}{dk_y} \right)^\beta + \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\beta \left( \frac{i}{\mu(k_y)} \frac{d\mu(k_y)}{dk_y} \right)^\alpha \right\} \\ e^{i\{-\theta(k_y) + \varphi(k_y)\}t} |I(k_x)^\dagger \phi|^2 |I(k_y)^\dagger \phi|^* (m(k_y)^\dagger \phi) \\ \{h_1(k_x)^* h_2(k_y)^* \pm h_2(k_x)^* h_1(k_y)^*\} \{h_1(k_x) m_2(k_y) \pm h_2(k_x) m_1(k_y)\} \\ + \dots$$

長時間極限では、振動項は均されてしまい、振動項を含む積分の寄与は、 $t$  を含まない積分に比べて無視できるほど小さいという近似を考える（ランダム位相近似）

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\alpha \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\beta + \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\beta \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\alpha \right\rangle$$

t を含まない積分

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\alpha \left( \frac{i}{\lambda(k_y)} \frac{d\lambda(k_y)}{dk_y} \right)^\beta + \left( \frac{i}{\lambda(k_x)} \frac{d\lambda(k_x)}{dk_x} \right)^\beta \left( \frac{i}{\lambda(k_y)} \frac{d\lambda(k_y)}{dk_y} \right)^\alpha \right\} \\ |I(k_x)^\dagger \phi|^2 |I(k_y)^\dagger \phi|^2 \{h_1(k_x)^* h_2(k_y)^* \pm h_2(k_x)^* h_1(k_y)^*\} \{h_1(k_x) h_2(k_y) \pm h_2(k_x) h_1(k_y)\} \\ + \dots$$

変数変換  $(k_x, k_y) \rightarrow (v_x, v_y)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\alpha \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\beta + \left( \frac{X_P(t)}{t} \right)^\beta \left( \frac{Y_P(t)}{t} \right)^\alpha \right\rangle \\ = \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \frac{v_x^\alpha v_y^\beta + v_x^\beta v_y^\alpha}{2} \hat{C}_P(v_x, v_y)$$

## 結果

x 方向, y 方向いずれも対称なアダマルウォークとして計算

(i)  $\alpha, \beta$  がともに偶数の場合

密度関数は 2 つの今野関数と対称関数の積

$$\hat{C}_P(v_x, v_y) = f^{\text{SH}}(v_x) f^{\text{SH}}(v_y) g_P^{\text{SH}}(v_x, v_y)$$

$$g_P^{\text{SH}}(v_x, v_y) = \begin{cases} \frac{1-v_x^2-v_y^2+2v_x^2v_y^2}{2} & \mathbf{P = B} \\ (v_x - v_y)^2 \frac{3v_x^2v_y^2 - 2v_x^2 - 2v_y^2 - 2v_xv_y}{2(v_xv_y - 3v_xv_y\sqrt{(1-2v_x^2)(1-2v_y^2)} - 2v_x^2 - 2v_y^2 + 6v_x^2v_y^2)} & \mathbf{P = F} \end{cases}$$

フェルミオンの密度関数には差の 2 乗が現れる

(ii) とともに奇数の場合

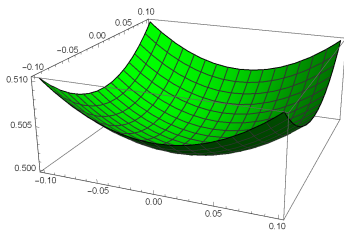
密度関数が負になってしまう領域がある

今後の検討課題

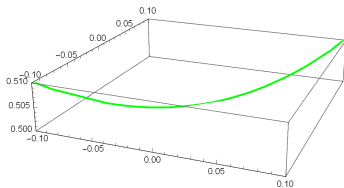
(iii) 偶奇性が異なる場合

対称性により, 密度関数は恒等的に 0 になる

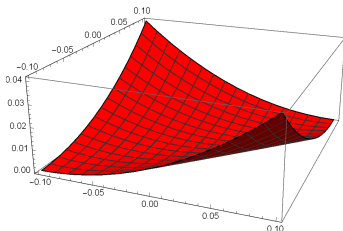
$$\hat{C}_B(v_x, v_y)$$



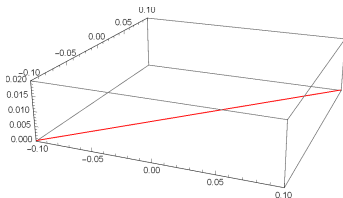
$v_x = v_y$  による切り口



$$\hat{C}_F(v_x, v_y)$$



$v_x = v_y$  による切り口



## 結論

2つの独立な1次元量子ウォークが対称なアダマルウォークの場合、それらを組み合わせたボソン・フェルミオンという2つのパターンの密度関数は、いずれも2つの今野関数と対称関数の積で表され、特に、フェルミオンの場合には差の2乗という特徴的な量が現れた。

## 課題

- 密度関数が負になる領域の取り扱い
- 多次元への拡張

### 予想

$D$ 次元のフェルミオン系の場合、ガウス型ユニタリアンサンプル (GUE) の固有値分布のように、差積  $\prod_{1 \leq j < k \leq D} (v_k - v_j)^2$  の因子が現れるだろう。