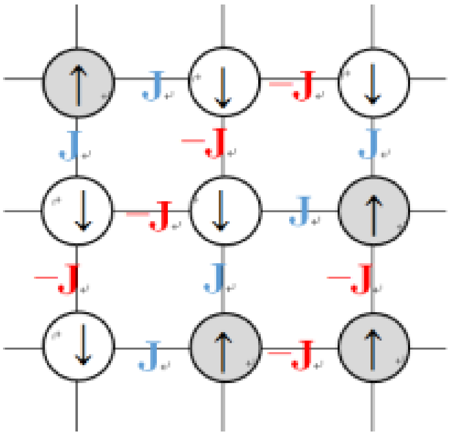
Ising model

香取研究室　4 年　黒田紘加

1.　Ising model とは

Ising model とは相転移を起こす簡単な系である。図 1 のように規則的に配列した粒子があり、それらの粒子はスピンを持っている。通常、原子は磁気モーメント μ_0 を持っているが、Ising model では上向きと下向きの 2 つの状態だけを考える。スピンが孤立して存在していれば 2 状態のエネルギーは等しいが、隣接した粒子間で相互作用が働いているので、相互作用のエネルギーは 2 スピンが同じ向きの時は −J、逆向きの時は J である。J>0（強磁性体）であれば相互作用はスピンを同じ向きにし、J<0（反強磁性体）であれば逆向きにする働きをする。



（図 1）2 次元においてスピンが乱雑に並んだ状態の相互作用のエネルギーの様子（J>0）

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & , \ \text{up} \\ -1 & , \ \text{down} \end{cases}$$

とする変数 σ_iを導入することで、隣接したスピン間の相互作用のエネルギーを

$$-\mathrm{J}\sigma_i\sigma_j$$

と表すことが出来る。よって、全系のエネルギー（ハミルトニアン）は、

$$\mathcal{H} = -\mathrm{J}\sum_{\langle i,j \rangle}\sigma_i\sigma_j$$

となる。また、

$$\sum_{\langle i,j \rangle}$$

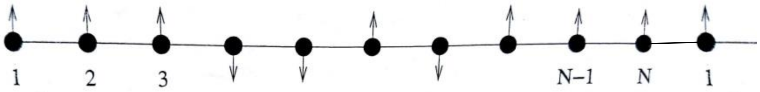
は、全ての隣接したスピンの組の和を表す。

2.　再帰的求解法による 1 次元 Ising model の解き方

鎖状に並んだ N 粒子の Ising spin の系のハミルトニアンは、（外部磁場 B=0、自由境界条件）

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N-1}\mathrm{J}_i\sigma_i\sigma_j$$

となる。※J_i は場所によって異なるため



$J_i = \beta \mathrm{J}_i$とすると、分配関数 Z_N は

$$Z_\mathrm{N} = \sum_{\sigma_1=-1}^{1}\sum_{\sigma_2=-1}^{1}\cdots\sum_{\sigma_N=-1}^{1}\exp\left(\sum_{i=1}^{N-1}J_i\sigma_i\sigma_j\right)$$

$Z_{\mathrm{N}+1} =$

$\sum_{\sigma_1=-1}^{1}\sum_{\sigma_2=-1}^{1}\cdots\sum_{\sigma_N=-1}^{1}\exp\left(\sum_{i=1}^{N-1}J_i\sigma_i\sigma_j\right)\sum_{\sigma_{N+1}}^{1}\exp(J_N\sigma_N\sigma_{N+1})$

$= Z_N(2\cosh J_N)$

$= (2\cosh J_\mathrm{N})(2\cosh J_{N-1})\cdots(2\cosh J_1)Z_1$

$= \left(2^\mathrm{N}\prod_{i=1}^{N}\cosh J_i\right)Z_N$

ここで、臨界温度 $\mathrm{T_C}$ をみつけるため、2 つのスピンの相関関数$G^{(2)}(r)$を計算する。

$$G^{(2)}(r) = \langle\sigma_k\sigma_{k+r}\rangle = Z_N^{-1}\sum_{\{\sigma\}}\sigma_k\sigma_{k+r}\exp\left(\sum_{i=1}^{N-1}J_i\sigma_i\sigma_j\right)$$

$$Z_N G^{(2)}(r) = \frac{\partial}{\partial J_k}\cdots\frac{\partial}{\partial J_{k+r-1}}Z_N$$

$$= \left(\prod_{i=k}^{k+r-1}\sinh J_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k-1}\cosh J_i\right)\left(\prod_{i=k+r}^{N-1}\cosh J_i\right)$$

$$\therefore G^{(2)}(r) = \prod_{i=k}^{k+r-1}\tanh J_i = \exp[-\mathrm{r}/\xi]$$

ここで、$\xi(J_i)$:相関長…相転移の起こる範囲を表す

$$\therefore \xi(J_i) = -\frac{1}{\log\tanh J_i}$$

全範囲は相転移を起こすというのは、$\xi \to \infty$と同値なので、

$$\tanh J \to 1,\ J = \beta J = \frac{J}{k\mathrm{T}} \to \infty$$

つまり、$\mathrm{T} = 0$で全範囲の相転移が起こるということだが、絶対零度が 0 というのは成り得ないので、1 次元 Ising model の相転移は有限温度では起こらないということが分かる。

【参考文献】①Giuseppe Mussardo, (2010) ” Statistical Field Theory ”, OXFORD UNIVERSITY PRESS.

②長岡洋介 (1999) 岩波書店『統計力学 岩波基礎物理シリーズ』