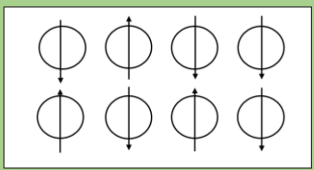
ポッツモデルと４色問題

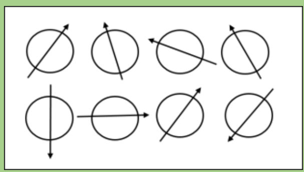
香取研究室　宮嶋 啓

ポッツモデルとは

イジングモデルにおける粒子が二方向のスピンをもつのに対して、ポッツモデルでは二種類以上の方向に向く粒子を考える。



イジングモデル(スピンは二種類)



ポッツモデル(スピンは任意)

ポッツモデルの分配関数の計算

ポッツモデルのハミルトニアンは、隣接する粒子同士の相互作用をJとおいて、

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\{ij\}} \delta(\sigma_i, \sigma_j)$$

と表せる。

ここで、　$\delta(\sigma_i,\sigma_j) = \begin{cases} 1 & (if \sigma_i = \sigma_j) \\ 0 & (if \sigma_i \neq \sigma_j) \end{cases}$　である。

よって N+1 個の粒子に関して分配関数は

$$Z_{N+1} = \left(\sum_{\sigma_{N+1}=1}^{q} e^{\beta J \delta(\sigma_N, \sigma_{N+1})} \right) Z_N$$

と表せる。

ここで、$e^{x\delta(a,b)} = 1 + (e^x - 1)\sigma(a,b)$ とおくと、

$$\sum_{\sigma_{N+1}}^{q} e^{[\beta J \delta(\sigma_N, \sigma_{N+1})]}$$

$$= \sum_{\sigma_{N+1}=1}^{q} \left[1 + \left(e^{\beta J} - 1\right)\delta(\sigma_N, \sigma_{N+1})\right]$$

$$= q + (e^{\beta J} - 1)$$

したがって分配関数について

$$Z_{N+1} = \left(q - 1 + e^{\beta J}\right) Z_N$$

この漸化式を、$Z_1 = q$であることを踏まえて解くと、

$$Z_N = q\left(q - 1 + e^{\beta J}\right)^{N-1}$$

相互関係J

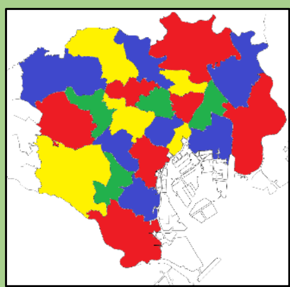
$J \to \infty$のときは隣り合う粒子間の相関が強いのですべてのスピンは同じ方向を向く。

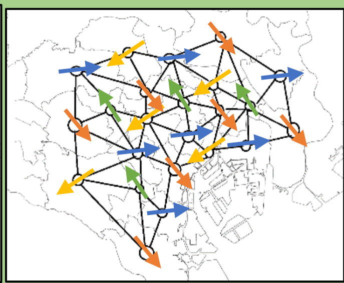
$J = 0$ のときは、相関がないので、隣接する粒子に関係なく任意のスピンの値を取る。

$J \to -\infty$のとき、強い負の相関を持つので隣接する粒子は必ず異なるスピンをもつ。

ポッツモデルと４色問題

「隣り合うエリアを違う色で塗るときには４色で塗り分けることができる。」という命題は聞いたことがある方も多いと思います。
ポッツモデルにおいて$J \to -\infty$としたときの「隣り合う粒子は違うスピンをもつ」という性質は、「隣り合うエリアを違う色で塗る」という地図製作における作業とよく似ています。
それの事実をもとに考えると、「二次元ポッツモデルにおいて、粒子のスピンは最低４種類あれば再現することができる」ということがわかる。





各エリアと粒子を対応させ、「隣接するエリア」を「隣接する粒子」と考えると、ポッツモデルにおける粒子の種類と地図の色を対応させることができる。

参考文献

・Giuseppe Mussardo.(2010) “Statistical Field Theory.” OXFORD UNIVERSITY PRESS.

・四色定理の紹介と五色定理の証明
http://mathtrain.jp/fivecolor