23pJ16-1

Relaxation driven by the exchange interaction in Dunkl processes

中大理工　　アンドラウス・セルヒオ

Relaxation driven by the exchange interaction in Dunkl processes

Chuo University,　　Sergio Andraus

ダンクル過程とは [1]、N 次元空間における不連続的な確率過程の一種であり、ルート系と呼ばれるベクトルの集合に依存する。A 型ルート系の場合では、A 型ダンクル過程は粒子交換相互作用入りダイソン模型として解釈できる。その後方フォッカー・プランク方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}p(t,\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) + \frac{\beta}{2}\sum_{1\le i\neq j\le N}\left\{\frac{1}{x_i-x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}p(t,\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\frac{p(t,\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})-p(t,\boldsymbol{y}|\sigma_{ij}\boldsymbol{x})}{(x_i-x_j)^2}\right\} \quad (1)$$

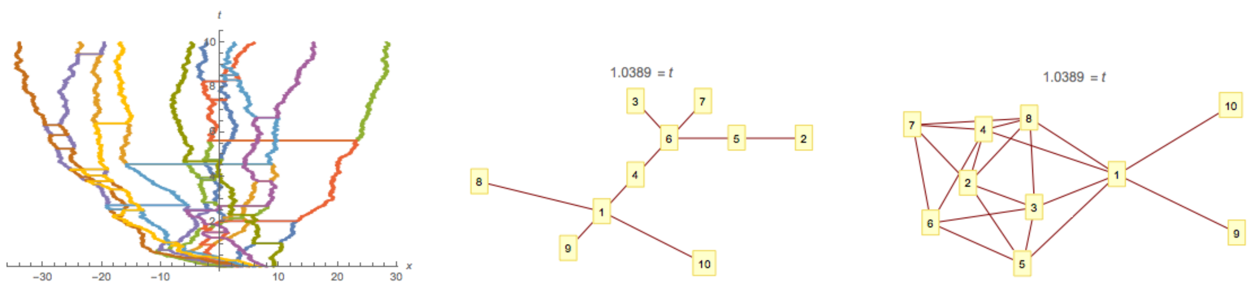
である。この式では、$p(t,\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})$ は過程が配置 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N$ から $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^N$ まで時間 $t>0$ で遷移する確率密度であり、$\sigma_{ij}\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の i と j 成分が交換された配置である。さらに、$\beta>0$ はパラメーターである。

粒子交換相互作用は (1) の差分の項に現れ、粒子交換の確率は粒子間距離の二乗に反比例することが明らかである。ダンクル過程は粒子経路と粒子交換の過程に分離できるが、粒子交換の過程は粒子経路に依存することが示せる。具体的に、$\beta>1$ の場合、ダンクル過程の配置 $\mathbf{X}_\beta(t)$ はダイソン模型の配置 $\mathbf{X}_\beta^{\mathrm{D}}(t)$ とダイソン模型に駆動される対称群上でのランダムウォーク $\rho_{\mathbf{X}_\beta^{\mathrm{D}}}(t)\in S_N$ を用いて

$$\mathbf{X}_\beta(t) = \rho_{\mathbf{X}_\beta^{\mathrm{D}}}(t)\mathbf{X}_\beta^{\mathrm{D}}(t) \quad (2)$$

のように表せる。

本研究では、粒子交換過程 $\rho_{\mathbf{X}_\beta^{\mathrm{D}}}(t)$ に着目し、その緩和過程について調べる。さらに、粒子交換を情報の交換として解釈することで、各粒子が頂点で、交換を行った粒子を辺で繋げることでグラフ理論の適用が可能になる。そこで、粒子交換相互作用によるグラフ形成過程について調べる。特に連結グラフや全域木の形成過程や形成時間について報告する。



a)　　b)　　c)

図 1: $(\beta,N)=(8,10)$-A 型ダンクル過程による a) 経路の例、b) 全域木の例、c) 連結グラフの例。

[1] P. Graczyk, M. Rösler, M.Yor, *Harmonic & stochastic analysis of Dunkl processes*, Hermann Mathématiques, (2008).