Bessel Processesと臨界次元D_c

矢萩　脩

Dを2以上の自然数とする.このとき$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_D)\in\mathbb{R}^D$ からはじまるD次元ブラウン運動をD次元ベクトルのように表記する.

$$\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{x}}(t)=(B_1^{x_1}(t),B_2^{x_2}(t),\cdots,B_D^{x_D}(t)),t\geq 0 \tag{1}$$

D次元ベッセル過程 –The D-dimensional Bessel Processes $(BES^{(D)})$–とは(1)の絶対値で定義する.

Definition of Bessel Processes

$$R^x(t)\equiv|\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{x}}(t)|=\sqrt{B_1^{x_1}(t)^2+B_2^{x_2}(t)^2+\cdots+B_D^{x_D}(t)^2},t\geq 0 \tag{2}$$

確率微分方程式(Stochastic Differential Equation)

$R^x(t)$に伊藤の公式を適応する.ただし,T^x =inf$\{t>0:R^x(t)=0\}$とする.

$$dR^x(t)=dB^x(t)+\frac{D-1}{2}\frac{dt}{R^x(t)}\ ,\ x>0\ ,\ 0\leq t<T^x$$

このように,微分方程式の中に確率過程 – stochastic processes – に従う項(ランダムな項)があるとき,確率微分方程式という.

次に,$BES^{(D)}$の臨界次元 – critical dimension – D_cを求めていくために必要な$\phi(x)$という関数を準備する.まず,その定義を与える.

Definition of $\phi(x)=\phi(x;x_1,x_2)$

$$\phi(x)=\phi(x;x_1,x_2)=\mathrm{P}[R^x(\sigma)=x_2] \tag{3}$$

ただし,

$$\sigma=\inf\{t>0:R^x(t)=x_1\ \mathrm{or}\ R^x(t)=x_2\} \tag{4}$$

とする.

(3)は,位置xからBessel Processesがスタートして, x_1に到達する前にx_2に到達する確率と解釈できる.以下では, その$\phi(x)$の具体的な数式を導出していく.

$\phi(x)$の導出

$0<x_1<x<x_2<\infty$とする. まず,(3)から

$$\phi(x_1)=0,\phi(x_2)=1 \tag{5}$$

という2つの条件式が得られる.いま(3)で定義した$\phi(x)$を用いて,

$$M(t)=\phi(R^x(t\wedge\sigma)) \tag{6}$$

という過程を考える. (6)は次のようにも書き換えられる.

$$M(t)=\mathrm{E}[\phi(R^x(\sigma))|\mathscr{F}_t] \tag{7}$$

フィルトレーション$\mathscr{F}$の定義から,

$$\mathrm{E}[M(t)|\mathscr{F}_s]=\mathrm{E}[\mathrm{E}[\phi(R^x(\sigma))|\mathscr{F}_t]|\mathscr{F}_s]=\mathrm{E}[\phi(R^x(\sigma))|\mathscr{F}_s]=M(s),0\leq\forall s\leq t \tag{8}$$

となるため,$\phi(x)$はマルチンゲールである.
さて,(6)に伊藤の公式を適応すると次のような方程式が導かれる.

$$M(t)=\phi(x)+\int_0^{t\wedge\sigma}\phi'(R^x(s))dB(s)+\int_0^{t\wedge\sigma}\frac{1}{2}\Big[\phi''(R^x(s))+\frac{D-1}{R^x(s)}\phi'(R^x(s))\Big]ds \tag{9}$$

(9)の右辺最終項 – the drift term – は$M(t)$がマルチンゲールであることから"0"にならなければならない.つまり,

$$\phi''(x)+\frac{D-1}{x}\phi'(x)=0\Longleftrightarrow\Big(\frac{d}{dx}+\frac{D-1}{x}\Big)\phi'(x)=0,x\in(x_1,x_2) \tag{10}$$

が$\phi(x)$の満たす条件である.
(10)は$\phi'(x)$に関して線形微分方程式であることから, まず$\phi'(x)$を求める.すると$\forall c\in\mathbb{Z}$を用いて,

$$\phi'(x)=cx^{-(D-1)} \tag{11}$$

となる. さらに,(5)の条件の下で(11)に関する微分方程式を解くと,
$D\neq 2$のとき

$$\phi(x)=\phi(x;x_1,x_2)=\frac{x^{2-D}-x_1^{2-D}}{x_2^{2-D}-x_1^{2-D}} \tag{12}$$

$D=2$のとき

$$\phi(x)=\phi(x;x_1,x_2)=\frac{\log x-\log x_1}{\log x_2-\log x_1} \tag{13}$$

が導出される.

さて,$\phi(x)$が(12),(13)のように導出できたので,ここからは臨界次元D_cを求めていく.そこで,次のTheoremを証明していく.

Theorem

(i) $D\geq 2\Longrightarrow T^x=\infty,\forall x>0,\ with\ probability\ 1.$
(ii) $D>2\Longrightarrow \lim_{t\to\infty}R^x(t)=\infty,\forall x>0,\ with\ probability\ 1.$
(iii) $D=2\Longrightarrow \inf_{t>0}R^x(t)=0,\forall x>0,\ with\ probability\ 1.$
(iv) $1\leq D<2\Longrightarrow T^x<\infty,\forall x>0,\ with\ probability\ 1.$

ただし,

$$T^x=\inf\{t>0:R^x(t)=0\} \tag{14}$$

とする.

Proof

(i) $D>2\Longrightarrow 2-D<0$のとき, $\forall x_2=L>x$ を(12)に代入し,$x_1\to 0$の極限をとる.

$$\phi(x;0,L)\equiv\lim_{x_1\to 0}\phi(x;x_1,L)=\lim_{x_1\to 0}\frac{x^{2-D}-x_1^{2-D}}{L^{2-D}-x_1^{2-D}}=1 \tag{15}$$

$D=2$のとき, $\phi(x)=$に対し,$x_1\longrightarrow 0$の極限をとる.

$$\phi(x;0,L)\equiv\lim_{x_1\to 0}\frac{\log x-\log x_1}{\log x_2-\log x_1}=1 \tag{16}$$

上記の結果が意味していることは,$T^x=\infty$となることである.

(ii) $D>2$のとき , $\beta=2-D<0$とおき. $x_k=\alpha^k(k\in\mathbb{N},\alpha>1)$とする.これを(13)に代入する.

$$\phi(x)=\phi(x_k;x_{k-1},x_{k+1})=\frac{x_k^\beta-x_{k-1}^\beta}{x_{k+1}^\beta-x_{k-1}^\beta}=\frac{1}{\alpha^{2\beta}+1}>\frac{1}{2} \tag{17}$$

これは,あるサイト$n>0$から$\mathbb{Z}$上を右に確率$p=\dfrac{1}{\alpha^{2\beta}+1}>\dfrac{1}{2}$,左に$1-p<\dfrac{1}{2}$で移動するランダムウォークを表している. したがって,$t\to\infty$のとき確率1で$R^x(t)\to\infty$となる.

(iii) $D=2$のとき, $x_1=\dfrac{1}{n}$, $x_2=e^n,n\in\mathbb{N}$として(13) に代入する.

$$\phi(x)=\phi(x;\frac{1}{n},e^n)=\frac{\log x+\log n}{n-\log n}\longrightarrow 0\ \ (n\to\infty) \tag{18}$$

(18)は,$R^x(t)$が$t\geq 0$のときに$\dfrac{1}{n}$に近づいていくことを意味している.
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\longrightarrow 0$であることから2次元での$R^x(t)-BES^{(2)}-$は,ある地点$x>0$から出発し,確率1で限りなく原点に近づくということが言える.

(iv) $1\leq D<2$のとき, $\lim_{x_1\to 0}x_1^{2-D}=0$となることに注意すれば,(12)は次のようになる.

$$\phi(x)=\phi(x;0,L)=\frac{x^{2-D}}{L^{2-D}}\longrightarrow 0\ \ (L\longrightarrow\infty) \tag{19}$$

(19)は$\forall x\in(x_1,x_2=L)$からスタートした$R^x(t)$がいつかx_1に戻ってくることを意味している. すなわち確率1で$T^x<\infty$となることを示している.

臨界次元D_cの値はいくつ?

Theoremの(i),(ii),(iii),(iv)は結局のところ何を意味していたのだろうか? まず$\phi(x)$が(12),(13)のように$D\geq 2$と$D<2$で場合分けされていることから, Theoremも(i)と(iv)のようにDで場合分けされている. つまり大きく2つに分けて$D\geq 2$のときは,$T^x=\infty$となり,$D<2$のときは,$T^x=<\infty$ となるというのが(i)と(iv)の主張である.ここで(iv)の$T^x<\infty$ということは, 過程が再帰的 -recurrent- ということを表している.
次に(ii)に注目する.(ii)では $\inf_{t\to\infty}R^x(t)=0$ であることから,過程が推移的 -transient- ということを表している.
最後に(iii)を見てみよう.(iii)では$T^x=\infty$という推移的な特徴を持っている一方で, $\inf_{t>0}R^x(t)=0$という再帰的な特徴も持っている.
このことから臨界次元D_cは2であることが導かれる.

参考文献

- Bessel Processes,Schramm-Loewner-Evolution,and the Dyson Model (Springer) 香取眞理 著