

ブラウン運動

遠藤大樹

ブラウン運動

- ▶ “1次元標準ブラウン運動”は以下のような性質を持つ
 - ・初期値は0(原点)
 - ・連続な軌跡を持つ
 - ・全ての時間区間 $t_m \rightarrow t_{m+1}$ における増加は独立であり、それぞれガウス分布(平均 0 分散 $t_m - t_{m-1}$)に従う

→時間 t における粒子の位置は $B(t)$ と表す

- ▶ stopping time

「賭けをやめるかどうかは、
やめた後の結果に依らない」ことを数学で考える

- ・Stopping time τ

$\tau \leq t$ の出来事が、 t までの時間で決定され
未来には依存しない

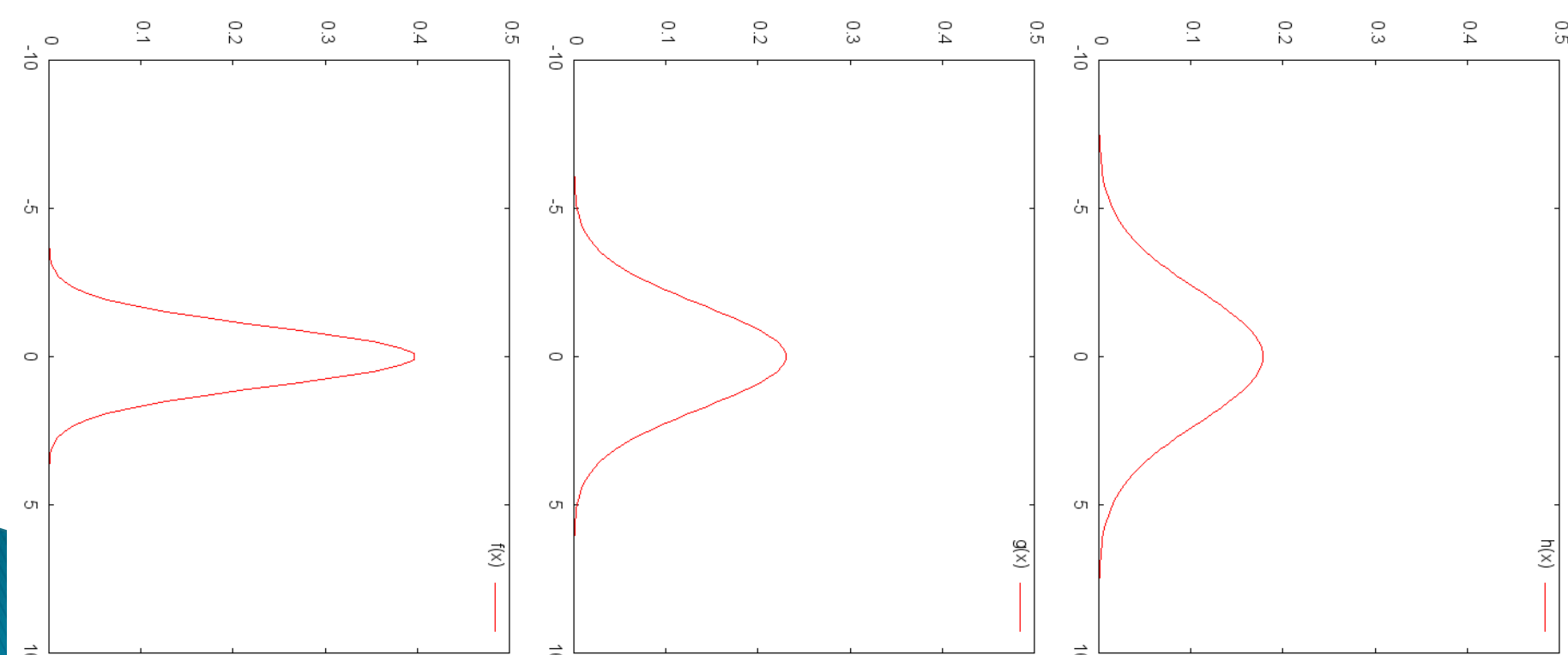
「 τ が stopping time ならば

出来事 $\{\omega: \tau \leq t\}$ は t より未来の出来事と独立」

- ▶ マルチンゲール (Martingale)

時間が経過しても期待値が変わらない性質

ブラウン運動は時間とともに分散は大きくなっていくが、
その期待値はかわらない



ブラウン運動の発見

- ▶ 「花粉を水の中に入れると、それは水を吸って膨らみ、破裂して直径 $1 \mu\text{m} (= 10^{-6}\text{m})$ ほどの微粒子が水中でまるで生きているかのように、しかし全く不規則にぴよこぴよこ動きまわる。この現象は1827年頃にイギリスの植物学者R.ブラウン(1773-1858)によって発見された。」

ブラウン運動の性質

- ▶ 反射原理
ある時間 T_a で粒子が a にいたとき $(B(T_a) = a)$

$$P[T_a < t, B(t) < a] = P[T_a < t, B(t) > a]$$

左に行く確率と右に行く確率が等しい

- ▶ マルコフ性

過去での出来事と未来での出来事が独立していること

$$\{B(t) : t < s\} \text{ と } \{B(t) : t > s\} \text{ が独立}$$

- ▶ 強マルコフ性

すべての stopping time でマルコフ性があること

すべての stopping time τ で

$$\{B(t) : t < \tau\} \text{ と } \{B(t) : t > \tau\} \text{ が独立}$$

参考文献

- ▶ 裳華房フィジックスライブラリー フラクタルの物理 (I) -基礎編- 松下貢 著 p62,63
- ▶ 岩波 数学辞典 第3版
- ▶ Bessel Processes, Schramm-Loewner Evolution, and the Dyson Model
Makoto Katori