確率過程とは

遠藤　大樹, 矢萩　脩

このポスターでは, 偶然性のもとで時間と共に変化する現象の解析に用いられる確率過程という概念を紹介する.

確率論における言葉の紹介

- 標本空間 Ω -sample space- : 標本点 ω -sample- 全体の集合のこと $(\omega \in \Omega)$.
- 事象 -event- : 標本点を1つ選んだとき, 真か偽かが確定するようなもの.
- 確率空間 -probability space- : $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ の3つの組のこと. $\mathscr{F}$ は上にあげた事象全体の集合で $\mathscr{F} \in \Omega$ の関係を満たし, Pはその $\mathscr{F}$ の元に対して確率 -probability- を与える関数を表す.
- 確率変数 -random variable- : 標本点を1つ選んだとき, その値が確定するようなもの.

イメージしやすくするために次のような試行で考えてみよう.

[試行]サイコロを1回振ったとき

標本空間 $\longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. (標本点は1∼6のそれぞれである.)
事象 $\longrightarrow$「偶数の目がでる」,「4以下の目がでる」, $\cdots$ など
確率変数 $\longrightarrow$「偶数の目がでたら $+1$, 奇数の目がでたら -1 とする」, $\cdots$ など

これから確率過程へ話をつなげる. そこで注目するのは確率変数である.

確率過程-stochastic process-って何 $\cdots$!?

確率過程とは, 時とともに変動する偶然量を抽象化した概念のことである. 言い換えれば, 確率変数が時刻 t に依存していることを表している.

さて, 確率過程の定義ができたので, その具体的な例を2つあげる.

ブラウン運動-Brownian Motion-

ブラウン運動をする粒子の位置は, その経路(path) ω と時刻 t に依存する. つまり, 確率変数として

$$B(\omega, t), \ \omega \in \Omega, \ t \geq 0. \tag{1}$$

が相当する. このとき確率変数 $B(\omega, t)$ は $t \geq 0$ のように連続的な時刻で与えられる. このような確率過程を連続型確率過程-continious stochastic process-という.

ランダムウォーク-random walk-

簡単のため, 1次元対称ランダムウォークを考える. ランダムウォークは, しばしばその動きから酔歩とも呼ばれることもある. きちんとした定義をすれば以下のようになる.

[定義]1次元対称ランダムウォーク

時刻 $t = 0$ に原点 o にいる動点が, $t = 1, 2, \cdots$ と1秒進むごとに $\mathbb{Z}$ 上を確率 $\frac{1}{2}$ で右に, 確率 $\frac{1}{2}$ で左に動くとき, これを1次元対称ランダムウォークという. つまり確率変数 B_t が1秒ごとに,

$$B_t = +1 \ \ \text{or} \ \ -1 \ \ (t \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

となることを意味する. このとき(2)は確率過程となる.

ただし, 今回は確率変数が $t = 0, 1, 2, \cdots$ という離散的な時刻で与えられる. このような確率過程を離散型確率過程 -discrete stochastic process- という. 下図は, fortranを用いてランダムウォークのシュミレーションを行い, そのデータを基にgnulotで描像したものである. プログラムの内容は次のようなものである.

(i) 0∼1までの一様乱数を行いたい回数だけ呼び出す.
(ii) その数が0.5よりも大きい場合は $+1$, それ以外の場合は -1 を対応させる.
(iii) (ii)を行う際に, 時刻(回数)と位置(数値)を記録する.
(iv) 行いたい回数だけ(ii)と(iii)を繰り返す.

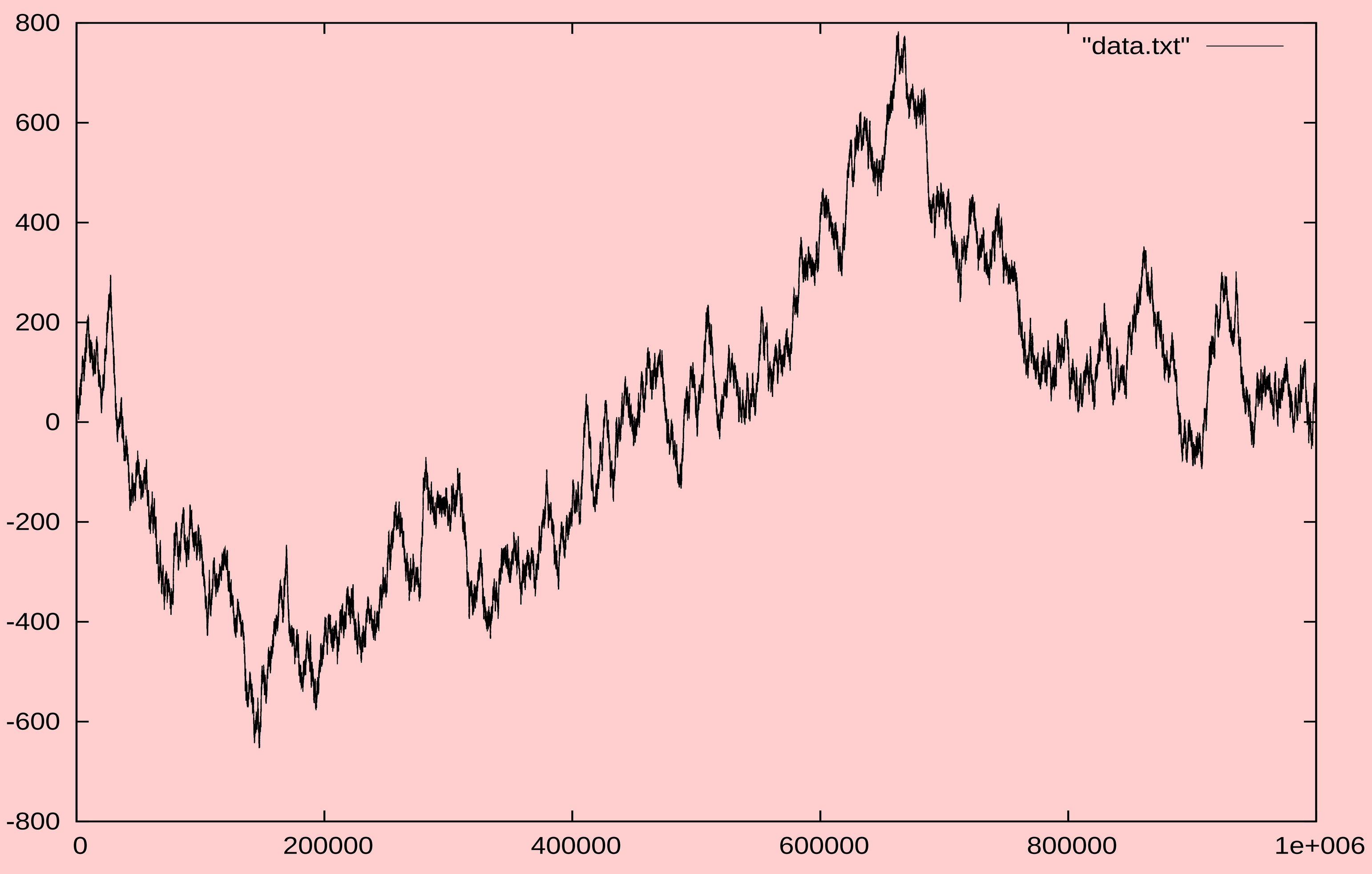

Figure: ランダムウォークの図

確率過程には非常に興味深い性質がある. それはマルチンゲール -martingale-と呼ばれるもので, 確率過程の期待値が時間に依存しないというものである.

マルチンゲール -martingale-

マルチンゲールの説明をするために, まずフィルトレーション $\mathscr{F}$ -filtration- という概念を説明する.

[定義]フィルトレーション

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ の上で, 確率過程 $X = X(t), (t \geq 0)$ が定められている. このとき, 各 $t \geq 0$ に対して $\mathscr{F}$ の部分 $\sigma-$加法族 $\mathscr{F}_t (\subset \mathscr{F})$ が

$$s < t \Longrightarrow \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \tag{3}$$

を満たすとき $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geq 0}$ をフィルトレーションという.

$\mathscr{F}$ が次の条件(i)∼(iii)を満たすとき, $\sigma-$加法族であるという.

(i) $\Omega \in \mathscr{F}, \emptyset \in \mathscr{F}$
(ii) $A \in \mathscr{F} \Longrightarrow A^c = \Omega A \in \mathscr{F}$
(iii) $A_n \in \mathscr{F} \ (n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

準備ができたのでマルチンゲールの定義を述べる.

[定義]マルチンゲール

確率過程 $X = X(t), (t \geq 0)$ が確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ の上で定められており, $X(t)$ が適合するフィルトレーション $\mathscr{F}_t, (t \geq 0)$ があるとする. このとき, $X(t)$ が $\mathscr{F}_t$ に関してマルチンゲールであるとは,

(a) $\mathrm{P}[|X(t)|] < \infty$
(b) $s < t$ に対して $\mathrm{E}[X(t)|\mathscr{F}_s] = X(s)$

が成り立つときにいう.

例えば, ブラウン運動に関していえば増分 -the increments- がマルチンゲールである.

$$\mathrm{E}[B(t)|\mathscr{F}_s] = B(s), 0 \leq s < t < \infty. \tag{4}$$

さらに増分の2乗は時刻になる.

$$\mathrm{E}[(B(t) - B(s))^2|\mathscr{F}_s] = t - s. \tag{5}$$

さて, ここまでは確率過程, 及びその例としてブラウン運動(連続型確率過程)とランダムウォーク(離散型確率過程)を紹介した. これらは数理物理学に深く関係している. 他方, ブラウン運動ないしランダムウォークは「フラクタル物理学」にも関係している. 次はそれを紹介しよう.

フラクタル - 自己相似フラクタル - とは

自然界には様々なパターン(模様)が存在する. そのパターンの一部をとり出して拡大して見ても, 全体と区別がつかないようなパターンのとき, それを自己相似フラクタルという.

(例)

自然界 $\longrightarrow$ カリフラワー, 雲, $\cdots$ など
幾何学 $\longrightarrow$ カントール集合, コッホ曲線, $\cdots$ など

Figure: 雲

Figure: ロマネスコ

上にあるように, フラクタルには明らかにパターンの粗密や入り込み具合の程度に差がある. そこで, その程度を比べるために定量化して数値で表したものを, フラクタル次元として導入する.

ランダムウォーク, ブラウン運動のフラクタル次元

ランダムウォークとブラウン運動は自己相似フラクタルである. これは直観的に理解できるだろう. これらのフラクタル次元を求めると"2"となることが知られている(一致する理由は, ランダムウォークを位置と時刻に関して連続的になるような極限をとったときにブラウン運動となるためである).

- 新物理学シリーズ37　統計力学I　(培風館)　田崎晴明　著
- 裳華房フィジックスライブラリー　フラクタルの物理(I)　基礎編　(裳華房)　松下貢　著
- 図解雑学　確率モデル　(ナツメ社)　今井紀雄　著
- 数学のかんどころ26　確率微分方程式入門 数理ファイナンスへの応用　(共立出版)　石川直之　著