伊藤の公式

中央大学理工学部物理学科４年　村谷　茉鈴

伊藤の公式とは、日本の数学者、伊藤清が考案した確率積分を計算する上で重要な公式です。この公式はファイナンス分野へ大きく貢献しました。

偏　微　分

伊藤の公式には、偏微分が含まれています。

偏微分とは、関数 $f(x,\ y)$の一方の変数に注目し、残りの変数を固定して微分することです。

次の関数を偏微分してみましょう。

$$f(x,\ y) = 2x^3 + xy^2 - y + 3$$

まず、偏導関数は、

$$f_x(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2$$

（ｙを固定してｘで微分する）

$$f_y(x,\ y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 1$$

（ｘを固定してｙで微分する）

次に、２階の偏導関数は、

$$f_{xx}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = 12x$$

$$f_{xy}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = 2y$$

$$f_{yx}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = 2y$$

$$f_{yy}(x,\ y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = 2x$$

伊藤の公式の微分形

$$\begin{aligned} &dF(t,\ X(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,\ X(t))\, dX_i(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(t,\ X(t))\, dt \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,\ j \le N} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(t,\ X(t))\, d\langle X_i,\ X_j \rangle_t,\quad t \ge 0 \end{aligned}$$

伊藤の公式の積分形

$$\begin{aligned} &F(t,\ X(t)) \\ &= F(0,\ X(0)) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(s,\ X(s))\, dX_i(s) \\ &+ \int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s,\ X(s))\, ds \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,\ j \le N} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_j}(s,\ X(s))\, d\langle X_i,\ X_j \rangle_s,\quad t \ge 0 \end{aligned}$$

伊藤の公式の特徴

ランダムな現象には必ず誤差が含まれます。上式の赤線部、２階の偏微分を含む項は誤差を表わしています。つまり、伊藤の公式は誤差を含んだ確率積分を可能にし、ブラウン運動の軌跡や、株式金融の価格変動など、ランダムな現象をより正確に予測出来るようになりました。

参考文献

Bessel Processes, Schramm - Loewner Evolution, and the Dyson Model　Makoto Katori

ファイナンスの確率積分　津野　義道　共立出版

微分積分学　東海大学数学教室編　東海大学出版会