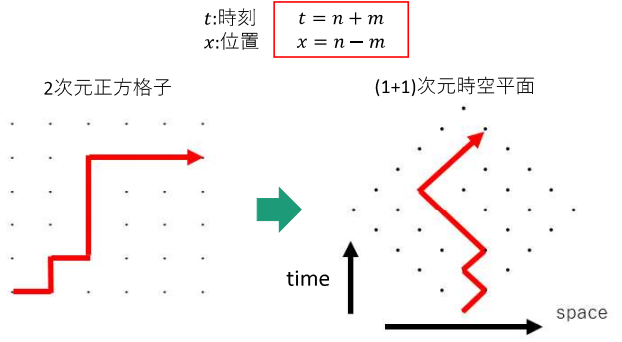


楕円関数組み合わせ論

楕円関数組み合わせ論に関連した確率過程の研究

中央大学理工学研究科物理学専攻
香取研究室 修士2年 馬場裕哉
白門祭パネル展示 2018/11/03

- \mathbb{Z}^2 から(1+1)次元時空平面への変換



研究の背景

- 楕円関数拡張(Elliptic-analogue)とは

ある自然数nの楕円関数拡張は以下で定義される。

$$[n]_{a,b;q,p} = \frac{\theta(q^n, aq^n, bq^2, a/b; p)}{\theta(q, aq, bq^{n+1}, aq^{n-1}/b; p)}$$

ただし、

$$\theta(x; p) = \prod_{j=0}^{\infty} \left\{ (1 - p^j x) \left(1 - \frac{p^{j+1}}{x} \right) \right\}, x \neq 0, |p| < 1$$

Modified Jacobi Theta Function

$$\theta(x_1, \dots, x_m; p) = \prod_{k=1}^m \theta(x_k; p)$$

楕円関数組み合わせ論

Transition weight

$$Q(s, x; t, y; r, \alpha, \beta, \kappa) = \frac{\prod_{u=1}^{t-s} \vartheta_1\left(\frac{u}{nr}; ik\right)}{\prod_{u=1}^{(t-s)+(y-x)/2} \vartheta_1\left(\frac{u}{nr}; ik\right) \prod_{u=1}^{(t-s)-(y-x)/2} \vartheta_1\left(\frac{u}{nr}; ik\right)}$$

$$\times \prod_{u=(s+x)/2+1}^{(t+y)/2} \vartheta_1\left(\frac{\alpha + \{(t-y) + (s-x)\}/2 + u}{nr}; ik\right)$$

$$\times \prod_{u=(s+x)/2+1}^{(t-y)/2} \vartheta_1\left(\frac{\beta + \{(t+y) + (s+x)\}/2 + u}{nr}; ik\right) \prod_{u=(s+x)+1}^{t+y} \vartheta_1\left(\frac{\beta + u}{nr}; ik\right)$$

$$\times \prod_{u=-(t+y)/2+1}^{-(s+x)/2} \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta + (t-y)/2 + u}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta - 1 + u}{nr}; ik\right)$$

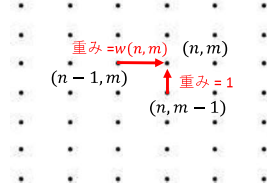
$$\times \prod_{u=-(t+y)/2+1}^{-(s+x)/2} \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta + (s-x-2)/2 + u}{nr}; ik\right)$$

楕円関数組み合わせ論

- 楕円関数組み合わせ論での重み

$$w(n, m) = \frac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha + n + 2m}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta + 2n}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta + 2n - 1}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta + 1 - n}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta - n}{nr}; ik\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha + n}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta + 2n + m}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\beta + 2n + m - 1}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta + 1 + m - n}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta + m - n}{nr}; ik\right)}$$

Jacobi Theta Function



$$\vartheta_1(v; \tau) = ie^{\pi i(\frac{v}{4} - v)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}) \theta(e^{2\pi i v}; e^{2\pi i \tau})$$

右へ進むときは行き先の座標に対する重みw(n, m)を掛け、上へ進むときは重みとして1を掛ける。

Excursion Processと測度の非負条件

- Excursion Processとは

時刻t=0で原点を出発し、時刻t=2Tで再び原点に戻ってくる過程

$$\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x) = \frac{Q(0,0; t, x)Q(t, x; 2T, 0)}{Q(0,0; 2T, 0)}$$

- 測度Q(s, x; t, y)の非負条件

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{1}{2}(3T + 1),$$

$$\beta = \beta_0 - \frac{1}{2}(3T + 1),$$

$\pi r = \sigma T$ を仮定する。
このとき非負条件は次のようになる。

$$\sigma \geq 3,$$

$$\frac{3}{2\sigma} \pi \leq \frac{\alpha_0}{r} \leq \left(1 - \frac{3}{2\sigma}\right) \pi,$$

$$\frac{3}{2\sigma} \pi \leq -\frac{\beta_0}{r} \leq \left(1 - \frac{3}{2\sigma}\right) \pi,$$

$$\frac{\alpha_0 - \beta_0}{r} \leq \left(1 - \frac{3}{2\sigma}\right) \pi,$$

楕円関数組み合わせ論

$W(P((l, k) \rightarrow (n, m)))$ は(l, k)から(n, m)へのパス全体の重みの和を表し、重み関数と呼ばれる。
重み関数は以下の漸化式を満たし、その解は空間的に不均一である。

$$W(P((l, k) \rightarrow (n, m))) = W(P((l, k) \rightarrow (n, m-1))) + W(P((l, k) \rightarrow (n-1, m)))w(n, m)$$

$$W(P((l, k) \rightarrow (n, m))) = \frac{\prod_{u=1}^{n-l} \vartheta_1\left(\frac{u}{nr}; ik\right) \prod_{v=1}^{m-k} \vartheta_1\left(\frac{v}{nr}; ik\right) \prod_{u=1}^{n-l} \vartheta_1\left(\frac{\alpha + m + k + u}{nr}; ik\right)}{\prod_{u=1}^{n-l} \vartheta_1\left(\frac{u}{nr}; ik\right) \prod_{v=1}^{m-k} \vartheta_1\left(\frac{v}{nr}; ik\right) \prod_{u=1}^{n-l} \vartheta_1\left(\frac{\alpha + u}{nr}; ik\right)}$$

$$\times \frac{\prod_{u=k+1}^m \vartheta_1\left(\frac{\beta + n + l + u}{nr}; ik\right) \prod_{v=1}^{n-l} \vartheta_1\left(\frac{\beta + v}{nr}; ik\right)}{\prod_{u=2l+k+1}^{2n-m} \vartheta_1\left(\frac{\beta + u}{nr}; ik\right)}$$

$$\times \prod_{u=-n+1}^{-l} \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta + u}{nr}; ik\right) \vartheta_1\left(\frac{\alpha - \beta - 1 + u}{nr}; ik\right)$$

3種類のExcursion Processes

Simplified Trigonometric Excursion Processes

$$\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; nr = 3T, \frac{\alpha_0}{r} = \frac{\pi}{2}) = c_1(t; T)$$

$$\times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{(2n+3T-2t-1)\pi}{6T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)}$$

$$\times \prod_{n=1}^{((3T-t)-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{(2n+2t-T-1)\pi}{6T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)} \prod_{n=1}^{((3T-t)+x)/2} \frac{1}{\sin\left(\frac{n\pi}{3T}\right)}$$

Trigonometric Excursion Processes

$$\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; nr = 6T, \frac{\alpha_0}{r} = \frac{\pi}{4}, \frac{\beta_0}{r} = -\frac{\pi}{4}) = c_1(t; T) \cos\left(\frac{x\pi}{6T}\right)$$

$$\times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(2n+3T-2t-1)\pi}{12T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{6T}\right)} \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(2n+3T-2t-1)\pi}{12T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{6T}\right)}$$

$$\times \prod_{n=1}^{((3T-t)-x)/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(2n+2t-T-1)\pi}{12T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{6T}\right)} \prod_{n=1}^{((3T-t)+x)/2} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(2n+2t-T-1)\pi}{12T}\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{6T}\right)}$$

Elliptic Excursion Processes

$$\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x; nr = 6T, \frac{\alpha_0}{r} = \frac{\pi}{4}, \frac{\beta_0}{r} = -\frac{\pi}{4}, \kappa) = c_1(t; T) \vartheta_1\left(\frac{x}{6T}; ik\right)$$

$$\times \prod_{n=1}^{(t+x)/2} \vartheta_1\left(\frac{1}{4} + \frac{2n+3T-2t-1}{12T}; ik\right) \prod_{n=1}^{(t-x)/2} \vartheta_1\left(\frac{1}{4} + \frac{2n+3T-2t-1}{12T}; ik\right)$$

$$\times \prod_{n=1}^{((3T-t)-x)/2} \vartheta_1\left(\frac{1}{4} + \frac{2n+2t-T-1}{12T}; ik\right) \prod_{n=1}^{((3T-t)+x)/2} \vartheta_1\left(\frac{1}{4} + \frac{2n+2t-T-1}{12T}; ik\right)$$

$$\times \prod_{n=1}^{((3T-t)-x)/2} \vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; ik\right) \vartheta_2\left(\frac{n}{6T}; ik\right) \prod_{n=1}^{((3T-t)+x)/2} \vartheta_1\left(\frac{n}{6T}; ik\right) \vartheta_2\left(\frac{n}{6T}; ik\right)$$

Simplified Trigonometric Excursion Processes

大偏差原理を用いた軌跡の解析

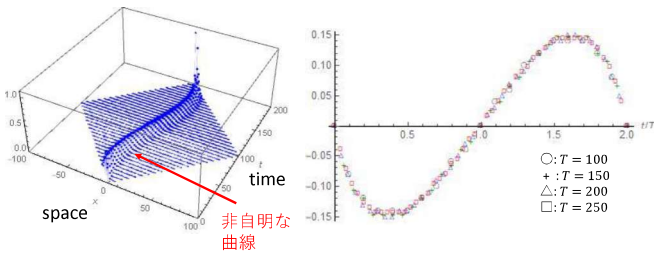


図: $T = 100$ での確率分布 $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x)$ の時間発展

図: $\hat{x}_{2T}^{max}(t)/T$ の数値計算結果

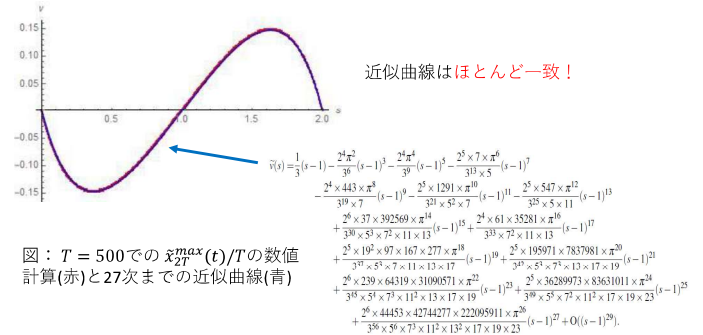


図: $T = 500$ での $\hat{x}_{2T}^{max}(t)/T$ の数値計算(赤)と27次までの近似曲線(青)

Trigonometric Excursion Processes

中心極限定理を用いた解析

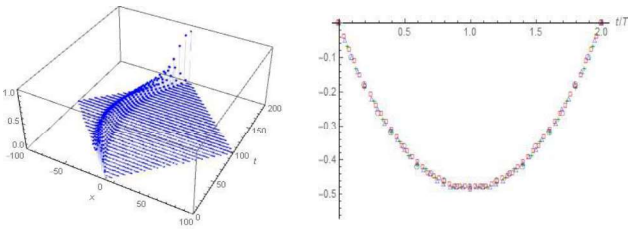


図: $T = 100$ での確率分布 $\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(t) = x)$ の時間発展

図: $\hat{x}_{2T}^{max}(t; \kappa)/T$ の数値計算結果

- Simplified Trigonometric Excursion Processes の $t = T$ の場合

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{T}}{2} \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(T) = \sqrt{T}\xi) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{4} \xi^2\right)$$

曲線の揺らぎは \sqrt{T} に比例している

ガウス分布

Elliptic Excursion Processes

中心極限定理を用いた解析

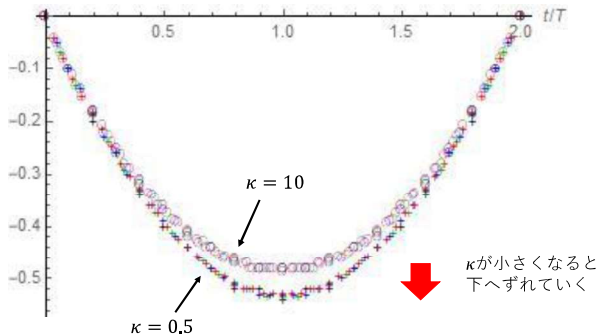


図: $\hat{x}_{2T}^{max}(t; \kappa)/T$ の数値計算結果

- Simplified Trigonometric Excursion Processes の $t = T$ の場合

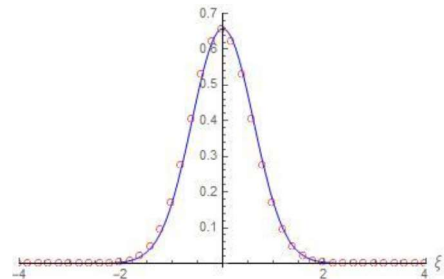


図: $T = 100$ での $(\sqrt{T}/2)\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(T) = \sqrt{T}\xi)$ (赤丸)と $\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{4} \xi^2\right)$ (青線)のプロット

大偏差原理を用いた軌跡の解析

論文発表

- Simplified Trigonometric Excursion Processes の例

$$\mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(sT) = vT) \cong e^{-TI(s,v)} \text{ in } T \rightarrow \infty, \quad I(s,v): \text{Rate Function}$$

$$I(s, \tilde{v}(s)) = 0, \quad s \in [0, 2]$$

を満たすとき、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{2T}^{0,0}(X(sT) = \tilde{v}(s)T) = 1$$

大数の法則

- Hiroya Baba, Makoto Katori: Excursion Processes Associated with Elliptic Combinatorics.

J. Stat. Phys. **171** (2018) 1035-1066、

arXiv:1711.00389v3[math-ph] 17 April 2018