WISHART ENSEMBLE について

中央大学理工学研究科物理学専攻
大学院修士課程1年遠藤大樹

Wishart Ensembleとは

- Wishart matrix Lの定義

- 行列K：以下で定義
  M×N行列（M＞N）
  各成分は2次元の正規分布に従う

- Wishart matrix L は次の式で与えられる。

$$L = K^T K$$

固有値分布の確率密度関数ρの導出1

- 確率微分方程式

行列Lの固有値はNが十分大きいとき確率密度関数ρは

$$-rG^2 = (1-r+2rzG)\partial_z G + \ \partial_\tau G$$

$$G(z,\tau) = \int d\mu \frac{\rho(\mu,\tau)}{z-\mu} \qquad r = N/M$$

を満たす（GはGreen関数）

- 特性曲線法での解法

特性曲線法では右の式を考える

連立微分方程式の解として

G(z,τ)が得られる

$$\frac{dz}{ds} = 1 - r + 2rzG$$

$$\frac{d\tau}{ds} = 1$$

$$\frac{dG}{ds} = -rG^2$$

固有値分布の確率密度関数ρの導出2

- 連立微分方程式の解

$$z(\tau) = \frac{1 - \frac{1}{r} + C\frac{1}{G(\tau)}}{G(\tau)}$$

G(z,τ)はここから定まる（Cは初期条件から決まる）

Green関数の性質より確率密度関数ρ(x,τ)が求まる

$$\rho(x,\tau) = -\mathcal{I}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}G(x+i\varepsilon,\tau)\right]$$

固有値分布の確率密度関数ρの導出3

- 初期値ρ(x,0)=δ(x)のとき

$$G(z,\tau)=\frac{(r-1)\tau+z-\sqrt{z^2-2(r+1)\tau z+(r-1)^2\tau^2}}{2r\tau z}$$

- ρは次の式で与えられる

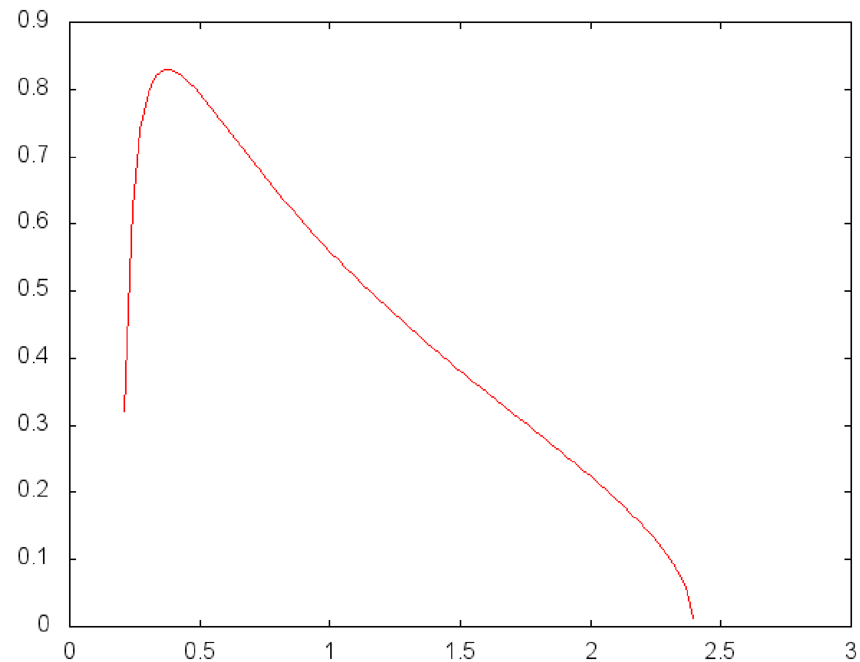
$$\rho(x,\tau)=\frac{\sqrt{-x^2+2(r+1)\tau x-(r-1)^2\tau^2}}{2\pi r\tau x}$$

- ただしsupportは $[(1-\sqrt{r})^2\tau,(1+\sqrt{r})^2\tau]$

固有値分布の確率密度関数ρの導出4

- ρのグラフ(r=0.3,τ=1)

- マルチェンコ-パスツール則として知られる



今後の研究

- 初期値$\rho(x,0)=\delta(x-a)$のとき
- そのほか（2点から始まるときなど）
  - $\rho(x,\tau)$のグラフ
  - $\rho=0$となる境界の式（support）

など研究中

参考文献

- Jean-Paul Blaizot, Maciej A.Nowak, and Piotr Warchol, Universal shocks in the Wishart random-matrix Ensemble, Phys.Rev,E **87**,052134(2013)
- Jean-Paul Blaizot, Maciej A.Nowak, and Piotr Warchol, Univesal shocks in the Wishart random-matrix Ensemble.II.Nontrivial initial conditions, Phys.Rev,E **89**,042130(2014)

ρの導出を行っている論文(それぞれ初期条件がx=0とx=a)

- 渡辺澄夫・永尾太郎・樺島祥介・田中利幸・中島伸一(2014)『ランダム行列と数理の科学』森北出版株式会社

ランダム行列を紹介する本であり第5章でwishart分布について触れている