ファンデルモンド行列式とランダム行列

中央大学物理学科学部4年香取研究室
今藤正登

ファンデルモンド行列式とは

ファンデルモンド行列式とは$N\times N$の

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_j-x_i)$$

であらわされる行列式である。

ex $N=3$のとき

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2x_3^2+x_1x_2^2+x_3x_1^2)\text{-}(x_2x_1^2+x_3x_2^2+x_1x_3^2)$$

$$=x_2(x_3^2-x_1^2)+(x_2^2+x_1x_3)(x_1-x_3)$$

$$=(x_3-x_1)\{x_2(x_3-x_2)-x_1(x_3-x_2)\}$$

$$=(x_3-x_1)(x_2-x_1)(x_3-x_2)$$

ファンデルモンド行列式の特徴

・Dの任意の二つの行を交換すると交換する前の符号を変えたものとなる。D=-D(交換後)
・k列それぞれの要素x_i^{k-1}を $\sum_{s=0}^{k-1} a_s x_i^s$ と置き換えた場合
D(置換後)=$a_{k-1} D$
となる。

ex　N=3の時それぞれのiに関するx_iを$5x_i+6$に置き換えると

$$D(\text{置換後})=\begin{vmatrix} 1 & 5x_1+6 & x_1^2 \\ 1 & 5x_2+6 & x_2^2 \\ 1 & 5x_3+6 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$=(5x_2+6)x_3^2+(5x_3+6)x_1^2+(5x_1+6)x_2^2$$

$$-\{(5x_1+6)x_3^2+(5x_2+6)x_1^2+(5x_3+6)x_2^2\}$$

$$=5D$$

ファンデルモンド行列式の一般式

N×Nのファンデルモンド行列式は$f_k(x_i) = \sum_{s=0}^{k-1} a_s x_i^s$ を使って

$$D = \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_{N-1}} \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & f_3(x_1) & \cdots & f_N(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & f_3(x_2) & \cdots & f_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & f_3(x_N) & \cdots & f_N(x_N) \end{vmatrix}$$

とあらわせる。

ファンデルモンドとヤコビアン

ここでは次の式の変数変換によるヤコビアンがファンデルモンドになっていることをたしかめていく。

$$\rho(H_{11},\dots,H_{NN})\prod_{i\le j} dH_{ij}=\rho(H_{11}(x,Y),\dots,H_{NN}(x,Y))\left|\mathrm{J}(\mathrm{H}\to\{x,Y\})\right|dY\prod_{i=1}^{N} dx_i$$

まずはHが実対称行列, Yは直行行列,Xが固有値行列の時,
その微分は

$$dH = dOXO^T + OdXO^T + OXdO^T$$

Oは直行行列故に$dO^T = -O^T dOO^T$

$$dH = dOXO^T + OdXO^T - OXO^T dOO^T$$

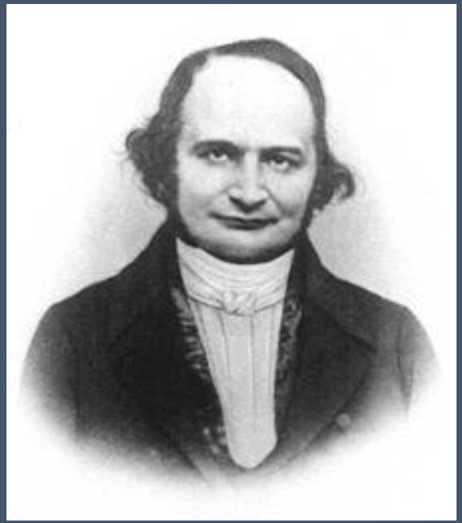
$dQ = O^T dHO$として($dH \to dQ$のヤコビアンは考えなくてよい)

$$dQ = O^T dOX + dX - XO^T dO$$

$d\Omega = O^T dO$として

$$dQ = d\Omega X + dX - Xd\Omega$$

Carl Gustav Jacob Jacobi



画像引用:Wikipedia

$X_{ij} = x_i \delta_{ij}$より

$$dQ_{ij} = d\Omega_{ij}(x_j - x_i) + dx_i \delta_{ij}$$

これよりHが2×2のときヤコビアンは

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dQ_{11}}{d\Omega_{12}} & \frac{dQ_{11}}{dx_1} & \frac{dQ_{11}}{dx_2} \\ \frac{dQ_{12}}{d\Omega_{12}} & \frac{dQ_{12}}{dx_1} & \frac{dQ_{12}}{dx_2} \\ \frac{dQ_{22}}{d\Omega_{12}} & \frac{dQ_{22}}{dx_1} & \frac{dQ_{22}}{dx_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & 1 & 0 \\ x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)$$

次にHがエルミート行列, Yがユニタリー行列, Xが固有値行列の時

その微分は

$$dH = dUXU^\dagger + UdXU^\dagger + UXdU^\dagger$$

Uはユニタリー行列故に$dU^\dagger = -U^\dagger dUU^\dagger$

$$dH = dUXU^\dagger + UdXU^\dagger - UXU^\dagger dUU^\dagger$$

$dQ = U^\dagger dHU$として$(dH \to dQ$のヤコビアンは考えなくてよい$)$

$$dQ = U^\dagger dUX + dX - XU^\dagger dU$$

$d\Omega = U^\dagger dU$として

$$dQ = d\Omega X + dX - X d\Omega$$

$$dQ_{ij} = d\Omega_{ij}(x_j - x_i) + dx_i \delta_{ij}$$

$d\Omega_{ij} = d\Omega_{ij}^R + i d\Omega_{ij}^I$とすると

$$dQ_{ij} = d\Omega_{ij}^R(x_j - x_i) + dx_i \delta_{ij} + i d\Omega_{ij}^I(x_j - x_i)$$

$dQ_{ij}^R = d\Omega_{ij}^R(x_j - x_i) + dx_i \delta_{ij}, dQ_{ij}^{\mathrm{I}} = d\Omega_{ij}^I(x_j - x_i)$とすると

$$dQ_{ij} = dQ_{ij}^R + i dQ_{ij}^{\mathrm{I}}$$

$N = 2$としてヤコビアンを計算すると

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{dQ_{11}^R}{d\Omega_{12}^R} & \frac{dQ_{11}^R}{d\Omega_{12}^I} & \frac{dQ_{11}^R}{dx_1} & \frac{dQ_{11}^R}{dx_2} \\ \frac{dQ_{12}^R}{d\Omega_{12}^R} & \frac{dQ_{12}^R}{d\Omega_{12}^I} & \frac{dQ_{12}^R}{dx_1} & \frac{dQ_{12}^R}{dx_2} \\ \frac{dQ_{12}^{\mathrm{I}}}{d\Omega_{12}^R} & \frac{dQ_{12}^{\mathrm{I}}}{d\Omega_{12}^I} & \frac{dQ_{12}^{\mathrm{I}}}{dx_1} & \frac{dQ_{12}^{\mathrm{I}}}{dx_2} \\ \frac{dQ_{22}^R}{d\Omega_{12}^R} & \frac{dQ_{22}^R}{d\Omega_{12}^I} & \frac{dQ_{22}^R}{dx_1} & \frac{dQ_{22}^R}{dx_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)^2$$

最後に,Hが四元自己双対行列,Sがシンプレティック行列,Xが固有値行列の時、その微分は

$$dH = dSXS^R + SdXS^R + SXdS^R$$

Sはシンプレクティック行列故に$dS^R = -S^R dS S^R$

$$dH = dSXS^R + SdXS^R - SXS^R dS S^R$$

$dQ = S^R dH S$として($dH \to dQ$のヤコビアンは考えなくてよい)

$$dQ = S^R dS X + dX - X S^R dS$$

$d\Omega = S^R dS$として

$$dQ = d\Omega X + dX - X d\Omega$$

$$dQ_{ij} = d\Omega_{ij}(x_j - x_i) + dx_i \delta_{ij}$$

$d\Omega_{ij} = d\Omega^R_{ij} + i d\Omega'_{ij} + j d\Omega''_{ij} + k d\Omega'''_{ij}$ とすると

$$dQ_{ij} = d\Omega^R_{ij}(x_j - x_i) + dx_i \delta_{ij} + i d\Omega'_{ij}(x_j - x_i) + \mathrm{j} d\Omega''_{ij}(x_j - x_i) + k d\Omega'''_{ij}(x_j - x_i)$$

$dQ^R_{ij} = d\Omega^R_{ij}(x_j - x_i) + dx_i \delta_{ij}$,

$dQ'_{ij} = d\Omega'_{ij}(x_j - x_i)$, $dQ''_{ij} = d\Omega''_{ij}(x_j - x_i)$, $dQ'''_{ij} = d\Omega'''_{ij}(x_j - x_i)$

関孝和

画像引用:Wikipedia

$$dQ^R_{ij} = d\Omega^R_{ij}\left(x_j - x_i\right) + dx_i\delta_{ij},$$

$dQ'_{ij} = d\Omega'_{ij}\left(x_j - x_i\right)$, $dQ''_{ij} = d\Omega''_{ij}\left(x_j - x_i\right)$, $dQ'''_{ij} = d\Omega'''_{ij}\left(x_j - x_i\right)$とすると,

$$dQ_{ij} = dQ^R_{ij} + idQ'_{ij} + \mathrm{j}dQ''_{ij} + kdQ'''_{ij}$$

実際にN=2のヤコビアンをもとめる。$A = x_2 - x_1$

$$|J| = \begin{vmatrix}
\frac{dQ^R_{11}}{d\Omega^R_{12}} & \frac{dQ^R_{11}}{d\Omega'_{12}} & \frac{dQ^R_{11}}{d\Omega''_{12}} & \frac{dQ^R_{11}}{d\Omega'''_{12}} & \frac{dQ^R_{11}}{dx_1} & \frac{dQ^R_{11}}{dx_2} \\
\frac{dQ^R_{12}}{d\Omega^R_{12}} & \frac{dQ^R_{12}}{d\Omega'_{12}} & \frac{dQ^R_{12}}{d\Omega''_{12}} & \frac{dQ^R_{12}}{d\Omega'''_{12}} & \frac{dQ^R_{12}}{dx_1} & \frac{dQ^R_{12}}{dx_2} \\
\frac{dQ'_{12}}{d\Omega^R_{12}} & \frac{dQ'_{12}}{d\Omega'_{12}} & \frac{dQ'_{12}}{d\Omega''_{12}} & \frac{dQ'_{12}}{d\Omega'''_{12}} & \frac{dQ'_{12}}{dx_1} & \frac{dQ'_{12}}{dx_2} \\
\frac{dQ''_{12}}{d\Omega^R_{12}} & \frac{dQ''_{12}}{d\Omega'_{12}} & \frac{dQ''_{12}}{d\Omega''_{12}} & \frac{dQ''_{12}}{d\Omega'''_{12}} & \frac{dQ''_{12}}{dx_1} & \frac{dQ''_{12}}{dx_2} \\
\frac{dQ'''_{12}}{d\Omega^R_{12}} & \frac{dQ'''_{12}}{d\Omega'_{12}} & \frac{dQ'''_{12}}{d\Omega''_{12}} & \frac{dQ'''_{12}}{d\Omega'''_{12}} & \frac{dQ'''_{12}}{dx_1} & \frac{dQ'''_{12}}{dx_2} \\
\frac{dQ^R_{22}}{d\Omega^R_{12}} & \frac{dQ^R_{22}}{d\Omega'_{12}} & \frac{dQ^R_{22}}{d\Omega''_{12}} & \frac{dQ^R_{22}}{d\Omega'''_{12}} & \frac{dQ^R_{22}}{dx_1} & \frac{dQ^R_{22}}{dx_2}
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix} = (x_2 - x_1)^4$$

よってN=2のそれぞれのHに対するヤコビアンがファンデルモンド行列式のべき乗となることが確認できました。

参考文献

- Giacomo Livan,Marcel Novaes,Pierpaolo Vivo. Introduction to Random Matrices,Springer International Publishing AG,2018,124p
- 関野薫.代数学と幾何学,学生社, 1969, 196p