ランダム行列の導入

中央大学理工学部物理学科香取研究室
16D2101017B　松島純菜

ランダム行列理論（RANDOM MATRIX THEORY）とは

行列の各成分が乱数で与えられたもの。乱数は同じ確率分布からとられ、一般的には独立である。
また、行列サイズをN→∞無限大にすると固有値の統計的な振る舞いには普遍性がある。

ただ単に行列にランダムな数を入れればいいの、、？

ランダム性は沢山の元を選ぶ際の様子であるから、
確率の言葉で定義される

ガウス型直交アンサンブルというガウス分布から選んだ乱数を成分に持つような行列を考える。固有値を実数にするために対称性を要請する。

実数xが分散1、平均0でガウス分布している時、確率分布関数は

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2次の正方実行列

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

ランダムに取るときの確率分布関数は

$$\rho(H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}) = \rho(H_{11}) \times \rho(H_{12}) \times \rho(H_{21}) \times \rho(H_{22})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{{H_{11}}^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{{H_{12}}^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{{H_{21}}^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{{H_{22}}^2}{2}}$$

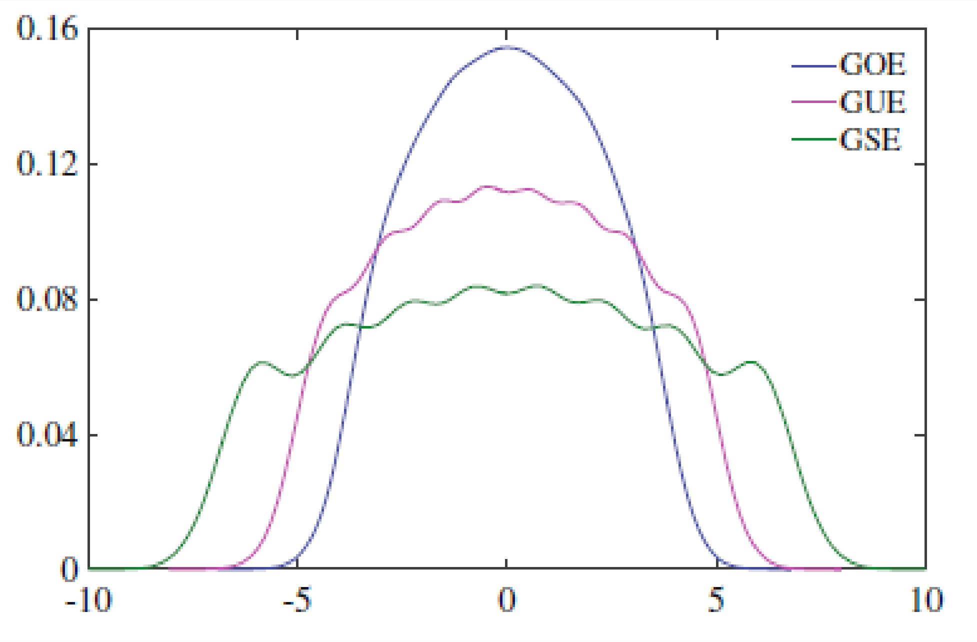
$$= \prod_{i=1}^{2} \prod_{j=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{{H_{ij}}^2}{2}}$$

上の式をN × Nの行列式で一般化すると

$$\rho(H_{11},\ldots,H_{\mathrm{NN}}) = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{\frac{{H_{ii}}^2}{2}}\right) \prod_{i<j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{\frac{{H_{ij}}^2}{2}}\right)$$

ガウス型直交アンサンブルの種類について

成分	対称性	分類
実数	symmetric	Gaussian Orthogonal Ensemble GOE
複素数	Hermitian	Gaussian Unitary Ensemble GUE
四元数	Self-Dual	Gaussian Symplectic Ensemble GSE



図：GOE, GUE ,GSEの固有値のヒストグラム（N = 8 and T = 50000 samples）

ランダム行列の広がりについて

ランダム行列は20世紀初めのWishartらによる数学統計学の研究に起源を持ち、1950年代にWignerが原子核物理学に転用してから理論物理学の研究対象として注目されるようになった。

ランダム行列を学ぶのはなぜ？

図1:乱数を2次元平面上にプロットしたもの(POISSON点過程)

密な部分と疎な部分が存在しており、我々の感覚で言うところの「全くランダムに点を打った」とは違った状態である。

このような偶然性は自然界に溢れており、それを記述 する理論が確率論や統計力学

図2:ランダム行列の固有値をプロットしたもの(Ginibre点過程)

図1に比べ点が散らばっていて、我々の感覚に近い
固有値間の距離がある範囲に保たれている。

固有値間には何らかの相関がある!

ランダム行列理論の有名な例

ガウス型直交アンサンブル、wignerの半円則、Coulombガス、スピングラス(ランダムに結合した無限スピン系)、非線形シグマモデル、量子カオス系のエネルギー準位統計

ランダム行列を応用できそうな例を具体的に紹介

利用者情報を処理し、利用者のそれぞれに合ったニーズを提供する。

航空機整備では整備の大量なデータを蓄積、処理し、故障を未然に防ぐ故障予測が行われている。

・どこ行きの便を利用する頻度が多いか
・貯まったマイルをどのくらい使うか
・席の種類
・利用目的

・ある計測器の値が一定値を超えると故障するとのデータが得られたので基準を定めて整備する。
・壊したら直すではなく、壊れないようにするという整備に変わってきている。

航空機を効率的、かつ生産的に飛ばすためには、ビックデータ(大量の情報)が必要になってくる。

ビックデータから法則性を見つけることはランダム行列で固有間に相関(法則性)があることと似ている。

Jean-Philippe Bouchaudというフランスの物理学者の論文では、ランダム行列をファイナンス分野でビックデータに応用できると記載がある。

いろんな分野でのビックデータに応用しより優れた技術へ。

就職活動
にも使える！

その他身の周りのランダム行列

- 生態系のダイナミクスの理想化されたモデル
- 金融工学における金融相関行列モデル
- 株式市場にある本質的な構造のモデル
- ビックデータなどの情報ネットワークのモデル

ランダム行列の応用範囲は広がり続けている

参考文献

・Introduction to Random Matrices Theory and Practice （2018） Giacomo Livan・Marcel Novaes・Pierpaolo Vivo

・ランダム行列の基礎　永尾太郎著（2005）

・ランダム行列の広がり　永尾太郎（2007）

・生体系のランダム行列理論(2017)

・その他論文等　香取眞理教授