# グラフでみるランダム行列

中央大学 物理学科　学部4年
香取研究室　峯岸 舞香

# ランダム行列・円則

正方行列の要素がランダムである場合、固有値は複素数になる。

この固有値の分布は、行列サイズ $N$ を十分大きくしていくと、一つの形に集約してくる。

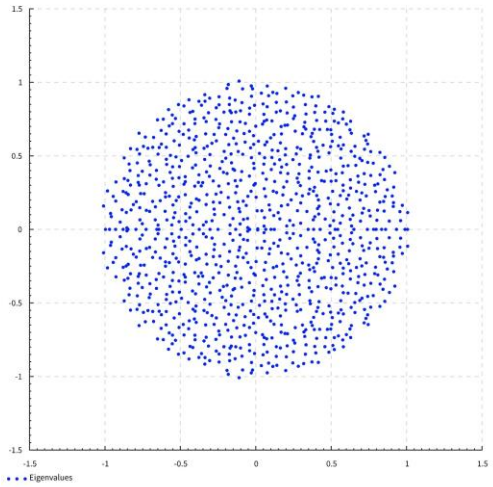
例えば、標準正規分布（平均値0、分散1）する乱数で与えた場合、行列サイズ（固有値の個数）

の平方根$\sqrt{N}$ で割った正規化固有値 λ は複素平面状の単位円盤上で一様に分布する。

この性質を円則と呼ぶ。

右図は、実数を行列要素にもつ正方行列で $N = 1000$ の場合の

固有値の分布である。




引用：https://qiita.com/lotz/items/69adabbe6139d323716a

# ランダム行列・円則

各行列要素が等確率で 1 または -1 の値をとるランダム行列を

Bernoulli ensemble という。

行列要素が従う確率変数は独立かつ同一分布で、その確率分布は、

$$P(x = 1) = \frac{1}{2}, P(x = -1) = \frac{1}{2}$$

のベルヌーイ分布。

# ランダム行列・円則

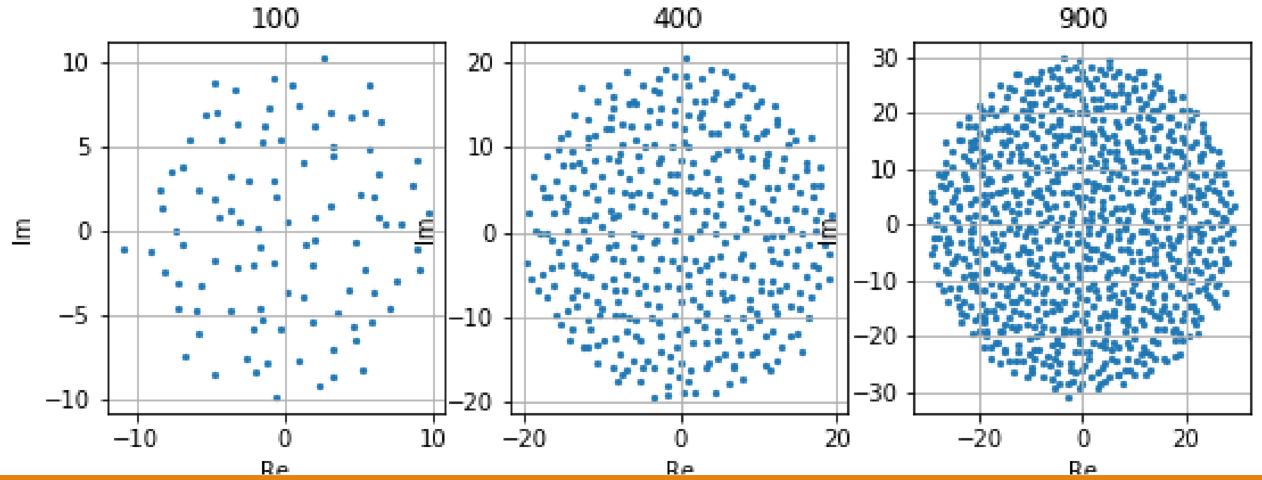
複素確率変数 $Z$ の確率密度関数が、

$$f(z) = \pi^{-1} e^{-|z|^2}, (z \in \boldsymbol{C})$$

のときに、$Z$ は複素標準正規分布 $Z$ に従う。すなわち、$Z \sim N_{\boldsymbol{C}}(0,1)$ である。

各成分がこの $Z$ のランダム行列のものを Ginibre ensemble という。

Ginibre(p) の固有値分布は、以下のように複素平面上の半径 $\sqrt{p}$ に一様に分布する。




引用：
http://mytache.hatenablog.com/entry/2019/02/13/043338

# ウィグナー行列

ウィグナー行列とは、原子核のエネルギー準位の研究で1950年代にウィグナーが導入した $N \times N$ 実対称行列（エルミート行列）を指す。

| 種別 | 実ウィグナー行列<br>（real wigner matrix） | 複素ウィグナー行列<br>（complex wigner matrix） |
| --- | --- | --- |
| 確率変数 | 実数<br>自由度　β＝1 | 複素数<br>自由度　β＝2 |
| | i.i.d.<br>k次モーメントが存在し有限 | |
| 対称性 | 実対称<br>$h_{i,k} = h_{k,i}$ | エルミート対称<br>$h_{i,k} = \overline{h_{k,i}}$ |
| 特徴 | 実対称行列 | エルミート行列 |
| | 固有値は実数 | |

# ウィグナーの半円則

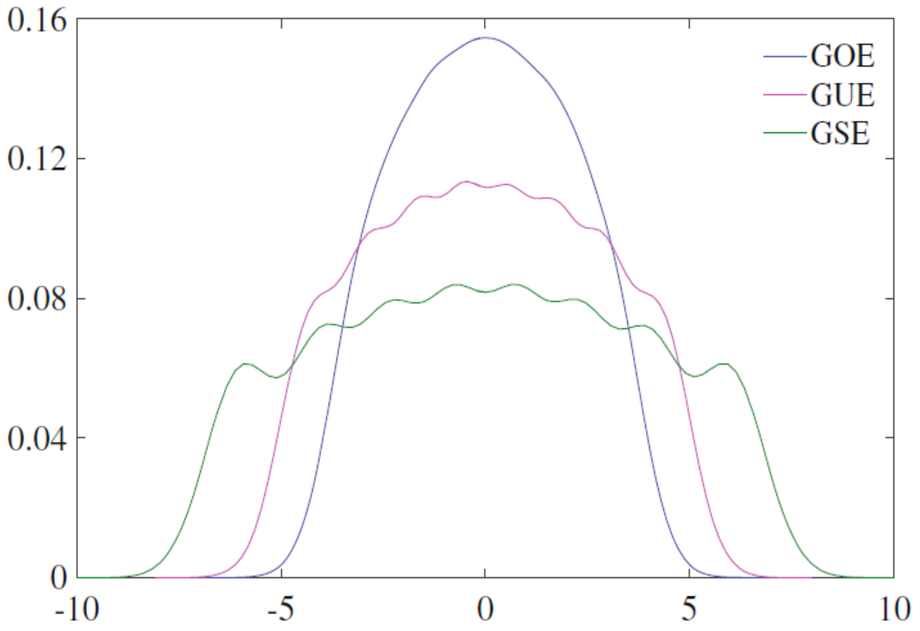
確率変数の確率分布に関しては、モーメント（確率論）が存在すること（平均や分散などが発散しないこと）を要求しているくらいで、確率分布の指定はない。

ランダム行列 (ウィグナー行列) の、行列の大きさが無限大に近づくにつれ、固有値分布の極限分布 (ウィグナー半円分布) として現れる。これを、ウィグナーの半円則という。

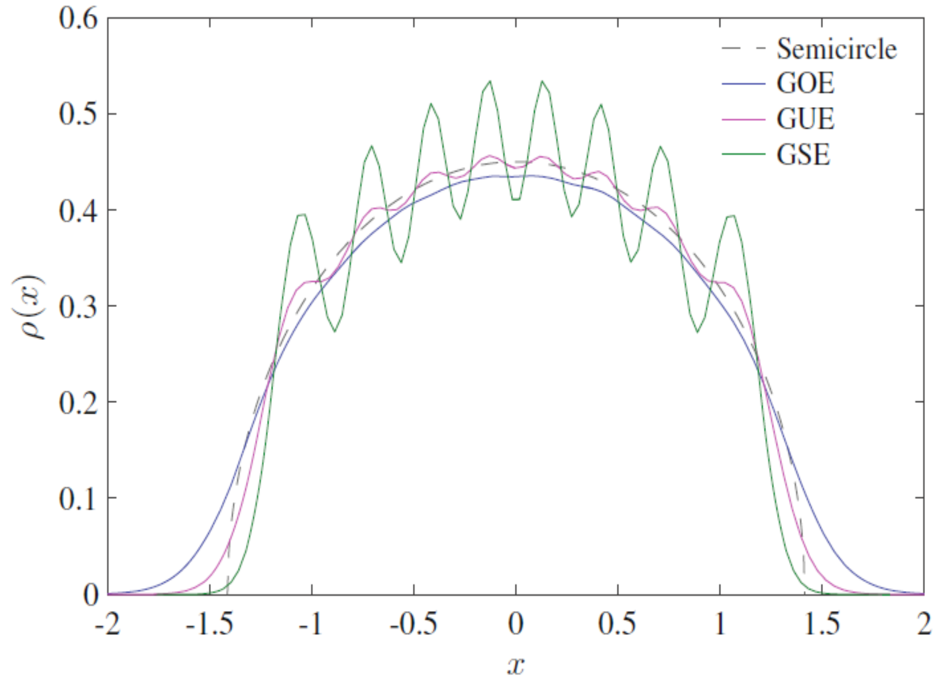
pdf :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2} \quad , & |x| \leq R \\ 0\,, & |x| > R \end{cases}$$

# ウィグナーの半円則




<u>Fig.1</u>　Histograms of GOE,GUE,GSE eigenvalues
( $N = 8$ and $T = 50000$ samples )




<u>Fig.2</u>　Rescaled densities for $N = 8$ ( GOE,GUE,GSE )

引用：Giacomo Livan , Marcel Novaes , Pierpaolo Vivo,
Introduction to Random Matrices Theory and Practice, Springer (2018)

# ウィグナーの半円則

$N \times N$ 行列の固有値の同時確率密度関数（$jpdf$）は次の式で与えられる。

$$\rho(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \prod_{j<k} \left| x_j - x_k \right|^{\beta}$$

$$Z_{N,\beta} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^{N} \frac{\Gamma(1+j\beta/2)}{\Gamma(1+\beta/2)}$$

$jpdf$ から、

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{\beta N}\, \rho\left(\sqrt{\beta N} \cdot x\right) = \rho_{sc}(x)$$

Wigner's semicircle law $\rho_{sc}(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2 - x^2}$

ここで、$\sqrt{\beta N}$ は interval [ $-\sqrt{2\beta N}$ , $\sqrt{2\beta N}$ ] を意味している。$\pm\sqrt{2\beta N}$ は、edges と呼ばれる。

# ウィグナーの半円則

*Note*

1. edges は$\sqrt{N}$にともなって大きくなる。より大きな行列は広範囲な固有値をとる。
   $N$ とともにどんどん広くなっていかないようなヒストグラムを得るため、
   $\sqrt{\beta N}$ により固有値を分ける必要がある。
   それを実行したのが Fig.2 で、Fig.1 をつくるために集められた似た固有値を用いている。
   このヒストグラムをみると、top からそれぞれにきれいに落ちていることがわかる。
2. $jpdf$ での edges は$\pm\sqrt{2\beta N}$ である。仮に、指数関数に特別な条件をあてると、
   同等に固有値をリスケーリングできる。
3. セミサークルの edges は $soft$ と呼ばれる。
   これは、edges を超える固有値のサンプルが0でない可能性を含むからである。（例：GOE ）
   他の行列は、$hard$ edges のスペクトル密度をもつ。

# 参考文献

・Giacomo Livan , Marcel Novaes , Pierpaolo Vivo,

Introduction to Random Matrices Theory and Practice , Springer (2018)

・ http://www.radio3.ee.uec.ac.jp/ronbun/Random_Matrix-YK-014.pdf

・ http://mytache.hatenablog.com/entry/2019/02/13/043338

・ http://nsakuma.com/wp-content/uploads/2018/08/yabuoku.pdf