Hilbert変換と積分方程式

中央大学　物理学科　学部4年
香取研究室　高山大河

目的

ガウス型統計集団の固有値密度関数$n(x)$は，Coulomb気体の方法によると

$$\mathrm{p.v.}\int_a^b \frac{n(y)}{y-x}dy = x \tag{1}$$

を満たす．この積分方程式を解くために，より一般的な形である積分方程式

$$\mathrm{p.v.}\int_a^b \frac{f(y)}{y-x}dy = g(x) \tag{2}$$

をHilbert変換を用いて解いていく．
ただし，p.v.はCauchyの主値積分を意味する．Cauchyの主値積分は，積分区間(a,b)内の点$x=x_0$において無限大となる関数$\xi(x)$に対して，

$$\mathrm{p.v.}\int_a^b \xi(x)dx \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon}+\int_{x_0+\varepsilon}^b\right)\xi(x)dx \quad , \quad 0<\varepsilon\le \min(x_0-a, b-x_0) \tag{3}$$

と定義される．

Hilbert変換

$1<p<\infty$として，関数$\phi(x)$をL^p空間に属し，区間$(-\infty,\infty)$上で定義された関数とする．この時，ϕのHilbert変換$H(\phi)(x)$を

$$f(x) = H(\phi)(x) \equiv \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(y)}{y-x}dy \tag{4}$$

と定義する．ここで，関数$f(x)$は(4)式によりほとんど至る所で定義され，$f(x)$もまたL^p空間に属する．

Hilbert変換の性質1(Fourier乗算作用素)

関数$\phi(x)$に対するFourier変換を$\mathcal{F}(\phi)(\omega)$とする．この時，

$$\mathcal{F}[H(\phi)](\omega) = -i\,\mathrm{sgn}(\omega)\mathcal{F}(\phi)(\omega) \tag{5}$$

が成り立つ．

Hilbert変換の性質2(相反定理)

$1<p<\infty$として，関数$\phi(x)$をL^p空間に属し，区間$(-\infty,\infty)$上で定義された関数とする．この時，

$$H[H(\phi)](x) = -\phi(x) \tag{6}$$

が成り立つ．これは，Hilbert変換の逆変換H^{-1}が

$$H^{-1} = -H \tag{7}$$

である事を意味する．

Hilbert変換の性質3(一般化されたParsevalの等式)

$1<p_1,p_2<\infty$として，関数$\phi_1(x)$及び$\phi_2(x)$をそれぞれL^{p_1}及びL^{p_2}空間に属する関数とする．この時，

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} = 1 \tag{8}$$

ならば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_1(x)\phi_2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}H(\phi_1)(x)H(\phi_2)(x)dx \tag{9}$$

が成り立つ．

Hilbert変換の性質4

$1<p_1,p_2<\infty$として，関数$\phi_1(x)$及び$\phi_2(x)$をそれぞれL^{p_1}及びL^{p_2}空間に属する関数とする．この時，

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} < 1 \tag{10}$$

ならば，

$$H[\phi_1(y)H(\phi_2)(y)+\phi_2(y)H(\phi_1)(y)](x) = H(\phi_1)(x)H(\phi_2)(x)-\phi_1(x)\phi_2(x) \tag{11}$$

が成り立つ．

有限区間におけるHilbert変換

$1<p<\infty$として，関数$\phi(x)$をL^p空間に属し，区間(a,b)上で定義された関数とする．この時，ϕの有限Hilbert変換$\mathcal{J}(\phi)(x)$を

$$f(x) = \mathcal{J}(\phi)(x) \equiv \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_a^b \frac{\phi(y)}{y-x}dy \tag{12}$$

と定義する．ここで，関数$f(x)$は(12)式によりほとんど至る所で定義され，$f(x)$もまたL^p空間に属する．

有限Hilbert変換の性質

$1<p_1,p_2<\infty$として，関数$\phi_1(x)$及び$\phi_2(x)$をそれぞれL^{p_1}及びL^{p_2}空間に属する関数とする．この時，

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2} \le 1 \tag{13}$$

ならば，

$$\mathcal{J}[\phi_1(y)\mathcal{J}(\phi_2)(y)+\phi_2(y)\mathcal{J}(\phi_1)(y)](x) = \mathcal{J}(\phi_1)(x)\mathcal{J}(\phi_2)(x)-\phi_1(x)\phi_2(x) \tag{14}$$

が成り立つ．

直観的には

(2)式の積分方程式の左辺は$\frac{1}{\pi}$の違いを除けば，関数$f(x)$の有限Hilbert変換となっている．もし，有限Hilbert変換における相反定理がHilbert変換におけるそれと殆ど同じならば，両辺に有限Hilbert変換を施し-1倍することで(2)式の積分方程式は解ける様に思える．しかし実際には，Hilbert変換と同じ様な形の相反定理を有限Hilbert変換は持たない．

準備

本題に入る前にちょっとした準備を行う．
まず，区間(a,b)上で定義された関数

$$\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \tag{15}$$

の有限Hilbert変換を考える．これは区間(a,b)内で恒等的に0となる．つまり，

$$\mathcal{J}\left[\frac{1}{\sqrt{(b-y)(y-a)}}\right](x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_a^b \frac{dy}{(y-x)\sqrt{(b-y)(y-a)}} \tag{16}$$

$$= 0 \qquad (x\in(a,b)). \tag{17}$$

しかしながら，区間(a,b)の外では，

$$\mathcal{J}\left[\frac{1}{\sqrt{(b-y)(y-a)}}\right](x) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{dy}{(y-x)\sqrt{(b-y)(y-a)}} \tag{18}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(x-b)(x-a)}} \qquad (x\notin(a,b)) \tag{19}$$

となる．
次に，区間(a,b)上で定義された関数

$$\sqrt{(b-x)(x-a)} \tag{20}$$

の有限Hilbert変換を考える．これは(17)式を用いることで，

$$\mathcal{J}\left[\sqrt{(b-y)(y-a)}\right](x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_a^b \frac{\sqrt{(b-y)(y-a)}}{y-x}dy \tag{21}$$

$$= -x+\frac{a+b}{2} \tag{22}$$

と求まる．

積分方程式の解

解くべき積分方程式は

$$\mathrm{p.v.}\int_a^b \frac{f(y)}{y-x}dy = g(x) \tag{23}$$

であったが，これは有限Hilbert変換を用いて

$$\mathcal{J}(f)(x) = \frac{g(x)}{\pi} \tag{24}$$

と書ける．
まず，有限Hilbert変換の性質の(14)式において

$$\phi_1(x)\equiv f(x) \qquad , \qquad \phi_2(x)\equiv\sqrt{(b-x)(x-a)} \tag{25}$$

とする．これは(22)式及び(24)式より，

$$\mathcal{J}\left[f(y)\left(-y+\frac{a+b}{2}\right)+\sqrt{(b-y)(y-a)}\,\frac{g(y)}{\pi}\right](x) = \frac{g(x)}{\pi}\left(-x+\frac{a+b}{2}\right)-f(x)\sqrt{(b-x)(x-a)} \tag{26}$$

と書ける．ここで(26)式の左辺第1項に着目すると，

$$\mathcal{J}\left[f(y)\left(-y+\frac{a+b}{2}\right)\right](x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_a^b\frac{f(y)}{y-x}\left(-y+\frac{a+b}{2}\right)dy \tag{27}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_a^b f(y)dy+\frac{g(x)}{\pi}\left(-x+\frac{a+b}{2}\right) \tag{28}$$

の様に分けることが出来る．この時，(28)式の右辺第1項の積分を

$$C = \int_a^b f(y)dy \tag{29}$$

とおく．ただし，Cは定数であり，規格化定数としての意味を持つ．また，(28)式の右辺第2項は(26)式の右辺第1項と等しい．この事を考慮すると(26)式及び(28)式より，

$$-\frac{C}{\pi}+\mathcal{J}\left[\sqrt{(b-y)(y-a)}\,\frac{g(y)}{\pi}\right](x) = -f(x)\sqrt{(b-x)(x-a)} \tag{30}$$

が言える．従って，(23)式の積分方程式の解は

$$f(x) = \frac{C-\ \mathrm{p.v.}\int_a^b\frac{\sqrt{(b-y)(y-a)}}{y-x}\frac{g(y)}{\pi}dy}{\pi\sqrt{(b-x)(x-a)}} \tag{31}$$

である．

参考文献

- Giacomo Livan, Marcel Novaes, Pierpaolo Vivo, Introduction to Random Matrices Theory and Practice, Springer, 2018.
- F.G.Tricomi, INTEGRAL EQUATIONS, INTERSCIENCE PUBLISHERS, 1957.
- E.C.Titchmarsh, INTRODUCTION TO THE THEORY OF FOURIER INTEGRALS, Oxford University Press, 1937.
- Javier Duoandikoetxea, Fourier Analysis, American Mathematical Society, 2001.