ハイゼンベルク点過程における超一様性について

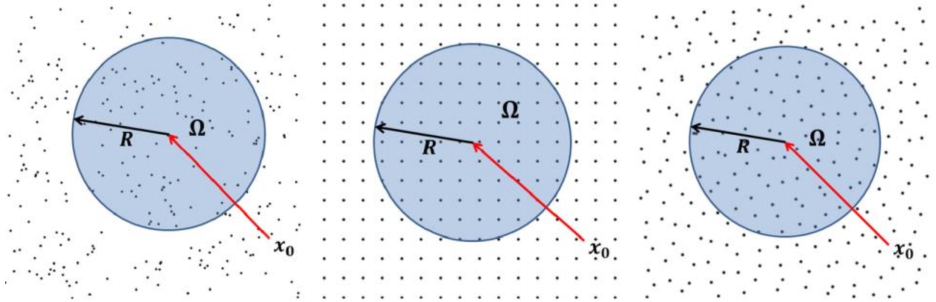
中央大学理工学部物理学専攻 M2 松井　貴都

共同研究者：香取 眞理(中央大学理工学部)

白井 朋之(九州大学 IMI)

目次

Matsui,T., Katori,M., Shirai,T.,
“ Local number variances and hyperuniformity of the Heisenberg family of determinantal point processes, arXiv:math-ph/2012.10585 “



1. Introduction

図1: 領域Λ (図ではΩ). 左からポアソン点過程, 格子, 超一様性の点過程[1]

超一様性（Hyperuniformity）～「強相関多粒子系において, 大規模スケールにおける密度ゆらぎが異常に抑制された状態」

・d次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$あるいはD次元複素空間$\mathbb{C}^D$を基本空間Sし, 参照測度$\lambda(dx)$を与える.

このS上に 並進移動不変な無限点過程を考える

$$d, D \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$$

$$\Xi = \sum_{i:i\in\mathbb{N}} \delta_{X_i} \qquad (1.1)$$

・有界な領域$\Lambda \subset S$に含まれる点の数の期待値は体積に比例：$\mathbf{E}[\Xi(\Lambda)] \propto \mathrm{vol}(\Lambda)$

ここで, 領域Λにおける点の数の分散を考える

$$\mathrm{var}[\Xi(\Lambda)] := \mathbf{E}[\Xi(\Lambda) - \mathbf{E}[\Xi(\Lambda)])^2$$

この分散は点過程Ξにおける局所的な分散を表し, 数分散（number variance ）とよばれる.

凝縮系物理学等では large scale limit における相関粒子系の密度が異常に抑制されるとき,
その系は"超一様"状態にあると言われている.
ここでの有界な領域Λは系の密度ゆらぎを観測するためのwindow（窓）とみなしている.

ランダムな点X_iの無限集合のデルタ測度の和として表現

$$\delta_X(\{x\}) = \begin{cases} 1, & x = X \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

したがって,領域$\Lambda \subset S$に含まれる点の数は

$$\Xi(\Lambda) := \int_\Lambda \Xi(dx) = \sum_{i:X_i\in\Lambda} 1$$

ここですべての有界な領域Λに対し次を仮定する;

$$\Lambda \subset S, \ \Xi(\Lambda) < \infty$$

→すなわち, 点が局所的に集中することがなく, 参照測度(reference measure) $\lambda(dx)$ に関して, 点過程は有限の密度を持つ.

$$\rho_1(x) < \infty$$

[1] Torquato, S., 2018, Hyperuniform states of matter. Phys. Rep **745**, 1–95

1. Introduction

無限ランダム点過程において, 超一様性は次で定義される

$$\lim_{\Lambda \to S} \frac{\mathrm{var}[\Xi(\Lambda)]}{\mathbf{E}[\Xi(\Lambda)]} = 0 \qquad (1.2)$$

ここで, $S = \mathbb{R}^d, \Lambda = \mathbb{B}_R^d,\ d \in \mathbb{N}$を仮定

$\mathbb{B}_R^d$ は半径$R > 0$のd次元球 : $\mathbb{B}_R^d := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq R\}$

この球の体積は次のように与えられる

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}_R^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)} R^d \qquad (1.3)$$

数分散は窓の体積の増大 $\Lambda \to S$ よりも遅く増大する

$\Gamma(z)$はガンマ関数を表す

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du,\ \mathrm{Re} z > 0$$

次が成り立つ

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

1. Introduction

超一様性はRの増大に伴う $\mathrm{Var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)]$ の増大が$\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)]$ の増大よりも遅く, 次式が成り立つ性質

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)]}{\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)]} = 0$$

Toruquato [1] に従うと, 数分散の挙動により超一様性は3つに分類される

$$\text{Class I}: \quad \mathrm{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^{d-1},$$

$$\text{Class II}: \quad \mathrm{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^{d-1}\log R,$$

$$\text{Class III}: \quad \mathrm{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^{d-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \text{as } R \to \infty$$

Class Ⅰ	完全結晶, 多くの準結晶, 一成分プラズマ,Ginibre点過程,etc
Class Ⅱ	いくつかの準結晶, リーマンゼータ関数の零点, Euclid 点過程, 最大ランダム充填構造,etc
Class Ⅲ	ランダム集団モデル ,etc

・ポアソン点過程のような無秩序点過程の場合体積のスケール：$\mathrm{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^d$

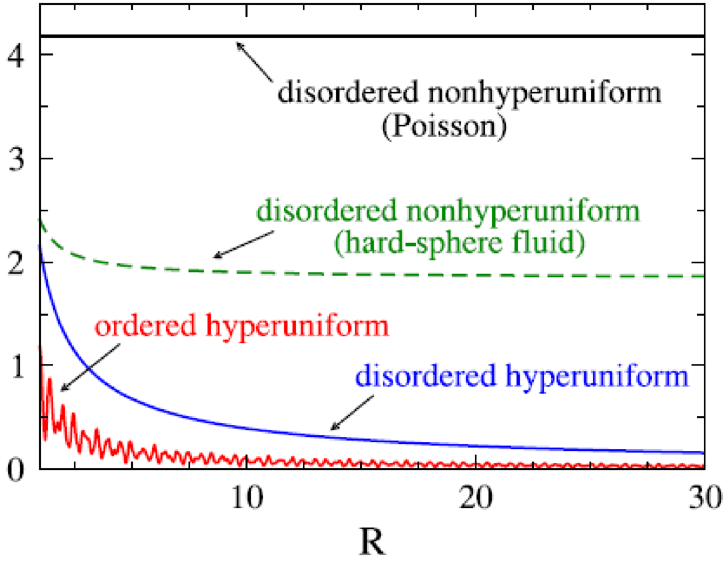


図2: R^3にスケールされた分散 [1]

[1] Torquato, S., 2018, Hyperuniform states of matter. Phys. Rep **745**, 1–95

1. Introduction

・$S =$ $\mathbb{R}$ 上のsinc DPP $(\Xi_{\rm sinc}, K_{\rm sinc}, dx)$, $K_{\rm sinc}(x,y) = \sin(x-y)/\{\pi(x-y)\},\ x, y \in \mathbb{R}$
はClass II の超一様性を有することが知られている [2]

$$\mathrm{var}[\Xi_{\rm sinc}(\mathbb{B}_R^1)] \sim \frac{\log R}{\pi^2} \quad \text{as } R \to \infty$$

Toruquato は $d \in \mathbb{N}$ を径数としたFermi-sphere 点過程族について研究($d = 1$とすると sinc DPP と一致する)
→ 一般の d についてClass II であることを明らかにした[1]

・無限点過程において, Class I の超一様性を有する点過程としてよく知られているのは$S =$ $\mathbb{C}$上のGinibre点過程$(\Xi_{\rm Ginibre}, K_{\rm Ginibre}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C})})$
$K_{\rm Ginibre}(x,y) = e^{x\overline{y}},\ x, y \in \mathbb{C}$, $\lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C})}(dx) := e^{-|x|^2} dx/\pi$

$$\mathrm{var}[\Xi_{\rm Ginibre}(\mathbb{B}_R^2)] \sim \frac{R}{\sqrt{\pi}} \quad \text{as } R \to \infty$$

これは白井先生が証明[3]

本研究は $D \in \mathbb{N}$ を径数としたGinibre点過程の拡張”Heisenberg点過程族 $(\Xi_{\mathrm{H}_D}, K_{\mathrm{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ “の超一様性を研究
→一般のDについて, Class I の超一様性を持つことが分かった

[1] Torquato, S., 2018, Hyperuniform states of matter. Phys. Rep **745**, 1–95
[2]Mehta, M. L., 2004, Random Matrices, 3rd edn, Pure and Applied Mathematics, Vol.142 (Amsterdam, Elsevier/Academic Press)
[3]Shirai, T., 2006, Large deviations for the fermion point process associated with the exponential kernel, J. Stat. Phys. **123**, 615–629

1. Introduction

本研究では複素平面を拡張した
高次元複素空間$\mathbb{C}^D, D \in \mathbb{N}$ 上の点過程について取り扱う

$S = \mathbb{C}^D, D \in \mathbb{N}$ のとき, $x \in S$ のD個の成分 $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(D)})$はそれぞれ,

$x^{(\ell)} = \mathrm{Re} x^{(\ell)} + \sqrt{-1} \mathrm{Im} x^{(\ell)}, \ \ell = 1, \ldots, D$ と表される.

ここでは, この複素構造を明示するため下記のように記すようにする
$x_{\mathrm{R}} = (\mathrm{Re} x^{(1)}, \ldots, \mathrm{Re} x^{(D)}) \in \mathbb{R}^D, \ x_{\mathrm{I}} = (\mathrm{Im} x^{(1)}, \ldots, \mathrm{Im} x^{(D)}) \in \mathbb{R}^D, \ x = x_{\mathrm{R}} + \sqrt{-1} x_{\mathrm{I}}$

$\mathbb{C}^D$上のLebesgue測度は次のように与えられる; $dx = dx_{\mathrm{R}} dx_{\mathrm{I}} := \prod_{\ell=1}^{D} d\mathrm{Re} x^{(\ell)} d\mathrm{Im} x^{(\ell)}$

$x = x_{\mathrm{R}} + \sqrt{-1} x_{\mathrm{I}}, \ y = y_{\mathrm{R}} + \sqrt{-1} y_{\mathrm{I}} \in \mathbb{C}^D$に対して, 標準 Hermite 内積を下記のように定義する

$$x \cdot \overline{y} = (x_{\mathrm{R}} + \sqrt{-1} x_{\mathrm{I}}) \cdot (y_{\mathrm{R}} - \sqrt{-1} y_{\mathrm{I}}) = (x_{\mathrm{R}} \cdot y_{\mathrm{R}} + x_{\mathrm{I}} \cdot y_{\mathrm{I}}) - \sqrt{-1} (x_{\mathrm{R}} \cdot y_{\mathrm{I}} - x_{\mathrm{I}} \cdot y_{\mathrm{R}})$$

2乗ノルムは $|x|^2 := x \cdot \overline{x} = |x_{\mathrm{R}}|^2 + |x_{\mathrm{I}}|^2, \ x \in \mathbb{C}^D$

$x = x_{\mathrm{R}}, \ y = y_{\mathrm{R}} \in \mathbb{R}^D$ の場合, $x \cdot \overline{y} = x_{\mathrm{R}} \cdot y_{\mathrm{R}} := \sum_{\ell=1}^{D} \mathrm{Re} x^{(\ell)} \mathrm{Re} y^{(\ell)}$
ノルムは次のように定義 ; $|x| := \sqrt{x \cdot \overline{x}} = \sqrt{|x_{\mathrm{R}}|^2 + |x_{\mathrm{I}}|^2}$

したがって, $S = \mathbb{C}^D$上の半径Rの円板 $\mathbb{D}_R^D := \{x \in \mathbb{C}^D : |x| < R\}$と,
$\mathbb{R}^d$上の球$\mathbb{B}_R^d$ は $d = 2D$ とすれば同一視できる

1. Introduction

$\mathbb{C}$ 上Ginibre点過程の参照測度: $\lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C})}(dx) := e^{-|x|^2} dx/\pi$

→$S \in \mathbb{C}^D$ 上では次のように拡張される

$$\lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)}(dx) := \prod_{i=1}^{D} \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C})}(dx_i) = \frac{1}{\pi^D} e^{-|x|^2} = \frac{1}{\pi^D} e^{-(|x_{\mathrm{R}}|^2 + |x_{\mathrm{I}}|^2)} \qquad (1.4)$$

Definition 1.1 : Heisenberg点過程族は,次元 $D \in \mathbb{N}$ を径数とした行列式点過程 $(\Xi_{\mathsf{H}_D}, K_{\mathsf{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$ の1径数族である. 各 D に対して, 相関核は

$$K_{\mathsf{H}_D}(x,y) = e^{x\overline{y}}, \;\; x, y \in \mathbb{C}^D \qquad (1.5)$$

で与えられる.

$D = 1$ のときGinibre点過程と一致

2. 主結果

Proposition 1.2 : $\mathbb{C}^D$ 上のHeisenberg点過程族 $\left(\Xi_{\mathrm{H}_D}, K_{\mathrm{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)}\right)$ においては次が成り立つ

Proposition1.2 の
証明は第5.1節で行う

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{R^{2D}e^{-2R^2}}{D!}\left[I_0(2R^2) + 2\sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2)\right], \quad R > 0 \qquad (2.1)$$

Remark 1 : $\mathbb{C}^1$上 Ginibre 点過程 $\left(\Xi_{\mathrm{Ginibre}}, K_{\mathrm{Ginibre}}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C})}\right)$ においては次が成り立つ.
この結果はすでにTorquatoが証明している[1]

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{Ginibre}}(\mathbb{B}_R^2)] = R^2 e^{-2R^2}\left[I_0\left(2R^2\right) + I_1\left(2R^2\right)\right], \; R > 0 \qquad (2.2)$$

$I_\nu(z)$: 第1種変形ベッセル関数

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$$

[1] Torquato, S. Hyperuniform states of matter. Phys. Rep **745**, 1–95 (2018)

2. 主結果

Remark 2: $\mathbb{C}^D$上のHeisenberg点過程族の数分散 $\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]$ は次の別表現をもつ

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)}\left[1 - \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)}\ {}_2F_2(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2)\right]$$

Remark 2 の
証明は第5.2節で行う

${}_2F_2$ は一般化超幾何関数を表し,$(a)_n$ はPochhamer 記号を表す.

$${}_pF_q(a_1,\cdots,a_p;b_1,\cdots,b_q;x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{x^n}{n!} \quad (a)_0 := 1,\ (a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1),\ n\in\mathbb{N}$$

Theorem 1.3 : Heisenberg点過程族$(\Xi_{\mathrm{H}_D}, K_{\mathrm{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$, $D\in\mathbb{N}$ は $R\to\infty$ において次が成り立つ

$$\lim_{R\to\infty} R\frac{\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]} = \frac{D}{\sqrt{\pi}} \qquad (2.3)$$

$$\alpha_k(D) = \begin{cases} 1, & \text{if } k=0, \\ \displaystyle\prod_{\ell=-k+1}^{k}(2D+2\ell-1) & \text{if } k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

したがって, すべての $D\in\mathbb{N}$ において Class I の超一様性を有する.
さらに$R\to\infty$において次の漸近展開が成り立つ

$$\frac{\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]} \sim \frac{D}{\sqrt{\pi}}R^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha_k(D)}{(2k+1)k!2^{4k}}R^{-2k} \qquad (2.4)$$

Theorem 1.3 の
証明は第6節で行う

2. 主結果

Remark 3 : [3]のProposition2.4によると, $R \to \infty$ とすれば $\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] \to \infty$ となることから, 一般に次が結論される

- $\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})/\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] \to 1 \quad \text{a.s.}$
- 中心極限定理; $(\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D}) - \mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})])/\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]$が $R \to \infty$ で標準正規分布$N(0,1)$に収束する

Remark 4 : DPPにおける双対性(duality)の関係を適用することにより([4]のTheorem2.6を参照), 球とは異なるwindowで $\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\Lambda)]/\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\Lambda)])$を評価できる.

多円板(polydisk) $\Delta_R^{(D)} := \{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(D)}) \in \mathbb{C}^D : |x^{(i)}| < R,\ i = 1, \dots, D\}$ を定義すると 次が成り立つ

$$\frac{\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\Delta_R^{(D)})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\Delta_R^{(D)})]} = 1 - \left(1 - \frac{\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_1}(\mathbb{B}_R^2)]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}_1}(\mathbb{B}_R^2)]}\right)^D$$

$$\sim \frac{D}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \left[1 - \frac{D-1}{2\sqrt{\pi}} R^{-1} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{(D-1)(D-2)}{3\pi} - \frac{1}{8} \right\} R^{-2} + O(R^{-3}) \right] \quad \text{as } R \to \infty \qquad (2.5)$$

$R \to \infty$において, 第1項は(2.3) と一致しているが
$R^{-k}, k > 1$ の項 は(2.4)とは異なっている

[3]Shirai, T., 2006, Large deviations for the fermion point process associated with the exponential kernel, J. Stat. Phys. **123**, 615–629

[4]Katori, M., Shirai, T., Partial isometries, duality, and determinantal point processes, arXiv:PR/1903.04945

3. 相関関数と分散

点過程 $\Xi = \Xi(\cdot)$ の配置空間は,次のように与えられる;

$$\mathrm{Conf}(S) = \left\{ \xi = \sum_i \delta_{x_i} \; : \; x_i \in S, \; \xi(\Lambda) < \infty \text{ for all bounded set } \Lambda \subset S \right\}$$

すべての点 $x \in S$ に対し,

$$\Xi(\{x\}) \in \{0, 1\}$$

であれば, その点過程は
単純(simple)であるという.

$\mathcal{B}_c(S)$ をS上のコンパクトな台をもつ有界な可測関数全体の集合とし, $\xi \in \mathrm{Conf}(S)$ と$\phi \in \mathcal{B}_c(S)$ に対し

$$\langle \xi, \phi \rangle = \int_S \phi(x) \xi(dx) = \sum_i \phi(x_i)$$

とおく. この形で与えられるランダム変数を, 一般に点過程 Ξ のlinear statistics という

点過程 Ξに対し, 次のような非負の可測関数 ρ_1 が存在するとき

$$\mathbf{E}[\langle \Xi, \phi \rangle] = \int_S \phi(x) \rho_1(x) \lambda(dx) \quad \forall \phi \in \mathcal{B}_c(S) \qquad (3.1)$$

ρ_1は参照測度λに対する点過程 Ξ の1点相関関数(first correlation function) とよばれる
定義より, $\rho_1(x)$ は参照測度$\lambda(dx)$に対する$x \in S$ での点の密度を与える

3. 相関関数と分散

・$n \in \mathbb{N}$ に対し, $\xi \in \mathrm{Conf}(S)$ からξ_nを次のように定義する

$$\xi_n := \sum_{i_1,\ldots i_n, i_j \neq i_k, j \neq k} \delta_{x_{i_1}} \cdots \delta_{x_{i_n}}$$

・λ の n 重積を $\lambda^{\otimes n}$とし,次のようにする

$$\lambda^{\otimes n}(dx_1 \cdots dx_n) := \prod_{i=1}^{n} \lambda(dx_i)$$

点過程 Ξ に対し, 次が成り立つS^n上の非負で対称な可測関数 ρ_n が存在するならば,

$$\mathbf{E}[\langle \Xi_n, \phi \rangle] = \int_{S^n} \phi(x_1, \ldots, x_n)\rho_n(x_1, \ldots, x_n)\lambda^{\otimes n}(dx_1 \cdots dx_n) \quad \forall \phi \in \mathcal{B}_c(S^n)$$

ρ_n を λ に対する点過程 Ξ の n点相関関数(n-th correlation function)という.

3. 相関関数と分散

・ここで次のことを仮定する.

(A1): $(S, \mathcal{B}_c(S), \lambda)$ 上の点過程 Ξ は1点相関関数ρ_1 と2点相関関数ρ_2 をもつ

Lemma 3.1：**(A1)**を仮定する.$\phi \in \mathcal{B}_c(S)$に対し,分散$\mathrm{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] := \mathbf{E}[(\langle \Xi, \phi \rangle - \mathbf{E}[\langle \Xi, \phi \rangle])^2]$ は次のように表せる

$$\mathrm{var}[\langle \Xi, \phi \rangle] = \int_S |\phi(x)|^2 \rho_1(x) \lambda(dx) + \int_{S \times S} \phi(x) \overline{\phi(y)} (\rho_2(x, y) - \rho_1(x) \rho_1(y)) \lambda^{\otimes 2}(dxdy) \tag{3.2}$$

ここでは $S = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ である場合を考える. その上で, 次のことを仮定する.

(A2): 系が $\mathbb{R}^d$上のLebesgue測度dxについて並進移動不変で, 次の2つを満たす.

(i) 参照測度が$\mathbb{R}^d$上のLebesgue測度dxに対する密度, $\ell(x)$ をもち($\lambda(dx) = \ell(x)dx$, $x \in \mathbb{R}^d$), 次が成り立つ.

$$\rho_1(x)\ell(x) = \text{constant} =: \widetilde{\rho}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

(ii) 可測な偶関数 $g_2(x) = g_2(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ があり, 2点相関関数（2nd correlation function）は次のように書ける.

$$\rho_2(x, y)\ell(x)\ell(y) = \widetilde{\rho}^2 g_2(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

3. 相関関数と分散

・ここで, 全相関関数（total correlation function）とよばれる関数を定義する

$$C(x) = g_2(x) - 1,\ \ x \in \mathbb{R}^d \qquad (3.3)$$

・(A1),(A2)の仮定の下に, (3.2) は次のように書ける

$$\begin{aligned}\mathrm{var}[\langle \Xi, \phi\rangle] &= \widetilde{\rho}\left[\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^2 dx + \widetilde{\rho}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} \phi(x)\overline{\phi(y)}C(x-y)dxdy\right] \\ &= \widetilde{\rho}\left[\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)|^2 dx + \widetilde{\rho}\int_{\mathbb{R}^d} C(z)dz \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\overline{\phi(x-z)}dx\right]\end{aligned}$$

積分変数を
$z = x - y$ を用いて
$(x, y) \to (x, z)$とした

ここで, 次式により ϕ の交差積分（intersection integral）を定義すると, Lemma 3.1よりProposition 3.2 が導かれる

$$\mathcal{I}_\phi(z) := \int_S \phi(x)\overline{\phi(x-z)}dx,\ \ \phi \in \mathcal{B}_c(S),\ \ z \in \mathbb{R}^d \qquad (3.4)$$

もし $\phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ であれば,
$\mathcal{I}_\phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$
が成り立つ.

Proposition 3.2 : **(A1)**,**(A2)**を仮定する. $\phi \in \mathcal{B}_c(S)$に対し, 分散 $\mathrm{Var}[\langle \Xi, \phi\rangle]$ は次のように与えられる

$$\mathrm{Var}[\langle \Xi, \phi\rangle] = \widetilde{\rho}\left[\int_S |\phi(x)|^2 dx + \widetilde{\rho}\int_S \mathcal{I}_\phi(x)C(x)dx\right] \qquad (3.5)$$

3. 相関関数と分散

$\varphi(x)$ が偶関数なら $\widehat{\varphi}(k)$ も偶関数である

$k=(k^{(1)},\dots,k^{(d)}),\ x=(x^{(1)},\dots,x^{(d)})\in\mathbb{R}^d$ に対し, 内積を $k\cdot x=\sum_{\ell=1}^d k^{(\ell)}x^{(\ell)}$ とする

Lebesgue可測な関数φについてのFourie変換と, その逆変換を次のように定義される

$$\widehat{\varphi}(k)=\mathsf{F}[\varphi](k):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{\sqrt{-1}k\cdot x}\varphi(x)dx \tag{3.6}$$

$$\varphi(x)=\mathsf{F}^{-1}[\widehat{\varphi}](x):=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}e^{\sqrt{-1}k\cdot x}\widehat{\varphi}(k)dk \tag{3.7}$$

・関数 $\varphi(x),\ \psi(x)$ が可積分かつそれらのFourie変換 $\widehat{\varphi}(k),\ \widehat{\psi}(k)$ がwell defined だと仮定する

$\varphi(x),\ \psi(x)$ が2乗可積分であるならば, 次のParseval の等式が成り立つ

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\varphi}(k)\overline{\widehat{\psi}(k)}dk \tag{3.8}$$

特に, 次が成り立つ

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^2dx=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{\varphi}(k)|^2dk$$

3. 相関関数と分散

Fourie変換の定義(3.6)より, $\mathrm{F}[\overline{\phi(\cdot - z)}](k) = \overline{\widehat{\phi}(k)}e^{\sqrt{-1}k\cdot z}$ が成り立つ. よって(3.8)を用いて(3.4)は次のように書き換えられる

$$\mathcal{I}_\phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\phi}(k)\overline{\widehat{\phi}(k)}e^{\sqrt{-1}k\cdot z}dk = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}k\cdot z}|\widehat{\phi}(k)|^2 dk,\ \ z \in \mathbb{R}^d$$

この式と, Fourie逆変換の式(3.7)と比較することで次の式を得る

$$\widehat{\mathcal{I}_\phi}(k) = |\widehat{\phi}(-k)|^2 = |\widehat{\phi}(k)|^2,\ \ \phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d),\ \ z \in \mathbb{R}^d \quad (3.9)$$

ここで, **(A3)** を仮定する.

(A3)：$S = \mathbb{R}^d,\ d \in \mathbb{N}$ならば 全相関関数 $C(x),\ x \in \mathbb{R}^d$は2乗可積分である. したがって, そのFourie変換 $\widehat{C}(k),\ k \in \mathbb{R}^d$も同様に2乗可積分である.

ここで, 構造因子（structure factor）を定義する: $\widehat{S}(k) = 1 + \widetilde{\rho}\widehat{C}(k),\ \ k \in \mathbb{R}^d$

$\widehat{S}(k)$ は構造因子とよばれる.
全相関関数 $C(x)$の定義より,
構造因子は偶関数である

→ Parseval の等式 (3.8)とProposition 3.2 を用いることで, 次のProposition 3.3 が成り立つ.

Proposition 3.3 : **(A1)-(A3)**を仮定する. $\phi \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ に対し, 分散は次のように与えられる

$$\mathrm{var}[\langle \Xi, \phi\rangle] = \frac{\widetilde{\rho}}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathcal{I}_\phi}(k)\widehat{S}(k)dk \quad (3.10)$$

4. 局所数分散

4.1 局所数分散の一般式

・$\Lambda \subset S$ の指示関数を次のように与える.

$$1_\Lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \Lambda, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここでは, Λ が $S = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ 上の球

$\Lambda = \mathbb{B}_R^d,\ R > 0$ である場合を考える

d 次元球の体積は(1.3)より

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}_R^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)} R^d$$

$1_{\mathbb{B}_R^d}(x)$ は定義より動径関数であるため，右のように置く: $1_{\mathbb{B}_R^d}(x) = \chi_{\mathbb{B}_R^d}(|x|)$

$\phi = 1_{\mathbb{B}_R^d}(x)$ とすると, 交差積分は次のようになる

$$\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^d}}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathbb{B}_R^d}(y) 1_{\mathbb{B}_R^d}(y-x)dy,\ x \in \mathbb{R}^d \quad (4.1)$$

$\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^d}}(x)$ は交差体積（intersection volume）とよばれ,2つの球の重なり部分の体積を表す

d次元球内に含まれる点の個数の平均は次のように与えられる

$$\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] = \tilde{\rho} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathbb{B}_R^d}(x)dx = \mathrm{vol}(\mathbb{B}_R^d)\tilde{\rho} \quad (4.2)$$

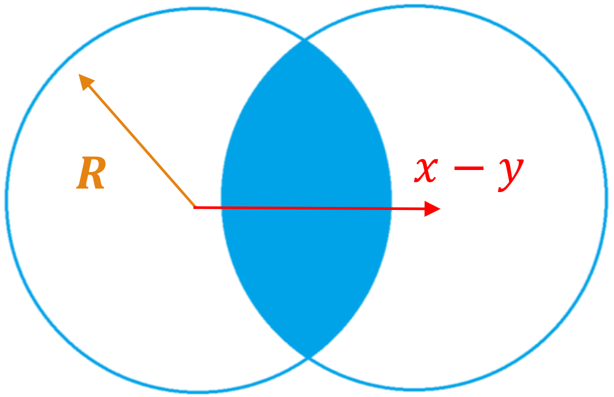


図3: 交差体積のイメージ

4.1 局所数分散の一般式

ここで, 次の補題を紹介する[1]

Lemma 4.1 : 可積分関数 $\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^d$ が動径関数, すなわち $r:=|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_d^2}$ のみに依存していて $\varphi(x)=f(r)$ と表せるとき, Fourie変換は $\kappa=|k|$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(k)=\widehat{f}(\kappa) &=(2\pi)^{d/2}\int_0^\infty r^{d-1}\frac{J_{(d-2)/2}(\kappa r)}{(\kappa r)^{(d-2)/2}}f(r)dr\\
&=\frac{(2\pi)^{d/2}}{\kappa^{(d-2)/2}}\int_0^\infty r^{d/2}J_{(d-2)/2}(\kappa r)f(r)dr \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

$J_\nu(x)$ は第1種Bessel関数

$$
J_\nu(x)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}
$$

$$
\nu>-1,\ x\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,0)
$$

逆変換は次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)=f(r) &=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_0^\infty \kappa^{d-1}\frac{J_{(d-2)/2}(\kappa r)}{(\kappa r)^{(d-2)/2}}\widehat{f}(\kappa)d\kappa\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}r^{(d-2)/2}}\int_0^\infty \kappa^{d/2}J_{(d-2)/2}(\kappa r)\widehat{f}(\kappa)d\kappa \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

[1] Torquato, S. Hyperuniform states of matter. Phys. Rep **745**, 1–95 (2018)

4.1 局所数分散の一般式

先程の動径関数のFourie変換を利用した

Lemma 4.2 : $1_{\mathbb{B}_R^d}(x)$ のFourie変換

$$\widehat{1_{\mathbb{B}_R^d}}(k) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{\sqrt{-1}k\cdot x} 1_{\mathbb{B}_R^d}(x)dx = \int_{\mathbb{B}_R^d} e^{\sqrt{-1}k\cdot x}dx$$

は動径関数であり, $\kappa := |k|$の関数として与えられる. $\widehat{1_{\mathbb{B}_R^d}}(k) = \widehat{\chi_{\mathbb{B}_R^d}}(|k|)$ と書くと, $\widehat{\chi_{\mathbb{B}_R^d}}(|k|)$ は次のように与えられる

$$\widehat{\chi_{\mathbb{B}_R^d}}(\kappa) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\kappa^{(d-2)/2}} \int_0^R r^{d/2} J_{(d-2)/2}(\kappa r)dr = (2\pi)^{d/2}\left(\frac{R}{\kappa}\right)^{d/2} J_{d/2}(\kappa R)$$

$\widehat{\mathcal{I}_\phi}(k) = |\widehat{\phi}(k)|^2$ の関係式(3.9)より, 交差体積のFourie変換は

$$\widehat{\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^d}}}(k) = (2\pi)^d R^d \frac{J_{d/2}(\kappa R)^2}{\kappa^d} =: \widehat{\mathcal{I}_{\chi_{\mathbb{B}_R^d}}}(\kappa), \;\; k \in \mathbb{R}^d, \;\; \kappa = |k| \qquad (4.5)$$

逆変換は

$$\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^d}}(x) = \mathrm{F}^{-1}\left[\widehat{\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^d}}}\right](x)$$

$$= \frac{(2\pi)^{d/2}}{r^{(d-2)/2}} R^d \int_0^R \frac{J_{d/2}(\kappa R)^2 J_{(d-2)/2}(\kappa r)}{\kappa^{d/2}} d\kappa =: \mathcal{I}_{\chi_{\mathbb{B}_R^d}}(r), \;\; r = |x| \le 2R$$

$r > 2R$ であれば,

$$\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^d}}(r) = 0$$

4.1 局所数分散の一般式

動径関数に対しては Lebesgue測度は

$$dx = r^{d-1}\sigma_{d-1}dr,\ \ \sigma_{d-1} = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$$

と極座標表示できる. よって, これを適用することで
(4.6) から(4.7), (4.8) から(4.9)の書き換えができる

Corollary 4.3： (i) **(A1), (A2)** を仮定すると, 数分散は全相関関数$C(x)$を用いて次のように書ける

$$\mathrm{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] = \tilde{\rho}\left[\mathrm{vol}(\mathbb{B}_R^d) + \tilde{\rho}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{I}_{\chi_{\mathbb{B}_R^d}}(|x|)C(x)dx\right] \tag{4.6}$$

全相関関数が動径関数で, $r = |x|$ を使って $C(x) = c(r)$ と書けるとき, 上の式は次のように書き直せる

$$\mathrm{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] = \tilde{\rho}\left[\mathrm{vol}(\mathbb{B}_R^d) + \frac{2\pi^{d/2}\tilde{\rho}}{\Gamma(d/2)}\int_0^{2R} \mathcal{I}_{\chi_{\mathbb{B}_R^d}}(r)c(r)r^{d-1}dr\right] \tag{4.7}$$

(ii) **(A1) – (A3)** を仮定すると, 数分散は構造因子 $\widehat{S}(k)$を用いて次のように書き直せる

$$\mathrm{var}[(\Xi(\mathbb{B}_R^d)] = \frac{\tilde{\rho}}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathcal{I}_{1_{\mathbb{B}_R^d}}}(|k|)\widehat{S}(k)dk = \tilde{\rho}R^d\int_{\mathbb{R}^d} \frac{J_{d/2}(|k|R)^2}{|k|^d}\widehat{S}(k)dk \tag{4.8}$$

構造因子が動径関数で, $\kappa = |k|$を使って$\widehat{S}(k) = \widehat{s}(\kappa)$と書けるとき, 上の式は次のように書き直せる

$$\mathrm{var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] = \frac{2\pi^{d/2}\tilde{\rho}}{\Gamma(d/2)}\int_0^{\infty} \frac{J_{d/2}(\kappa R)^2}{\kappa}\widehat{s}(\kappa)d\kappa \tag{4.9}$$

4.2 行列式点過程

Definition 4.4：$(S, \mathcal{B}_c(S), \lambda)$上の単純点過程 Ξは, 測度λ に対する相関関数が一般に, 可測な積分核$K: S \times S \to \mathbb{C}$ 用いて次のように与えられるとき, 行列式点過程（Determinantal Point Process）と言われる.

$$\rho_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det_{1 \le j,k \le n} [K(x_j, x_k)], \text{ for every } n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in S$$

積分核 K は相関核(correlation kernel) とよばれる. DPPは (Ξ, K, λ)で指定する.

$S = \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ または $S = \mathbb{C}^D \simeq \mathbb{R}^d,\ d = 2D,\ D \in \mathbb{N}$ である場合を考え, 次の仮定を置く.

DPP 点過程 Ξ は行列式点過程(Ξ, K, λ) において次を満たす

(i) 相関核はHermiteである

$$\overline{K(x,y)} = K(y,x), \quad x, y \in S$$

(ii) 参照測度が$\lambda(dx) = \ell(x)dx,\ x \in S$ で与えられ, 次が成り立つ

$$K(x,x)\ell(x) = \text{constant} =: \tilde{\rho},\ \forall x \in S$$

(iii) 下記のような可測な偶関数 $C(x) = C(-x),\ x \in S$ があり, 次式が成り立つ.

$$\frac{|K(x,y)|^2}{K(x,x)K(y,y)} = -C(x-y),\ x, y \in S$$

Corollary 4.5：**(DPP)** と **(A3)** 仮定する. このとき, **Corollary 4.3** (ii) が成り立つ.

4.2 Heisenberg点過程族

Lemma 4.6 : $\mathbb{C}^D$ 上のHeisenberg点過程族 $(\Xi_{\mathsf{H}_D}, K_{\mathsf{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$, $D \in \mathbb{N}$ の行列式点過程は $S = \mathbb{C}^D \simeq \mathbb{R}^d,\ d = 2D$ に対し**(DPP)** を満たし,次の2つの式が成り立つ

$$\widetilde{\rho} = \pi^{-D} \tag{4.10}$$

$$C(x) = c(|x|) = -e^{-|x|^2} \tag{4.11}$$

証明: Definition1.1, 4.4 より, $\rho_1(x) = K_{\mathsf{H}_D}(x,x) = e^{|x|^2},\ x \in \mathbb{C}^D$ であるから, **(DPP)** より

$$\widetilde{\rho} = K_{\mathsf{H}_D}(x,x) \cdot \ell(x) = e^{|x|^2} \cdot \frac{e^{-|x|^2}}{\pi^D} = \frac{1}{\pi^D}$$

また, $K_{\mathsf{H}_D}(x,y) = e^{x\cdot\overline{y}}$ より

$$C(x-y) = -\frac{|K_{\mathsf{H}_D}(x,y)|^2}{K_{\mathsf{H}_D}(x,x)K_{\mathsf{H}_D}(y,y)} = -e^{x\cdot\overline{y}+y\cdot\overline{x}-|x|^2-|y|^2} = -e^{-|x-y|^2} =: c(|x-y|) \quad \blacksquare$$

$S = \mathbb{C}^D \simeq \mathbb{R}^d,\ d = 2D,\ D \in \mathbb{N}$ であれば, $\mathbb{C}^D$上の円板 $\mathbb{D}_R^D$ と $\mathbb{R}^{2D}$ 上の球$\mathbb{B}_R^{2D}$ は同一視できる

4.2 Heisenberg点過程族

数分散の具体的な計算は,
Proposition 4.7 を用いて行う

Proposition 4.7: Heisenberg点過程族 $(\Xi_{\mathsf{H}_D}, K_{\mathsf{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$, $D \in \mathbb{N}$ においては, 次の2つの式が成り立つ

$$\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{R^{2D}}{D!} \tag{4.12}$$

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{2R^{2D}}{(D-1)!}\int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa}(1-e^{-\kappa^2/4})d\kappa, \quad R>0 \tag{4.13}$$

証明: $\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]$ は, $\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \mathrm{vol}(\mathbb{B}_R^{2D})\widetilde{\rho}$ より, 直ちに求まる : $\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)} = \frac{R^{2D}}{D!}$

$C(r) = c(r) = -e^{-r^2}$ について, これは動径関数であるから動径関数に対するFourie変換を用いると

$$\widehat{c(\kappa)} = \frac{(2\pi)^D}{\kappa^{D-1}}\int_0^\infty r^D J_{D-1}(\kappa r)c(r)dr = -\frac{(2\pi)^D}{\kappa^{D-1}}\int_0^\infty r^D e^{-r^2} J_{D-1}(\kappa r)dr$$

$$= -\frac{(2\pi)^D \kappa^{D-1}}{(2\cdot 1^2)^{D-1+1}} e^{-\kappa^2/(4\cdot 1^2)} = -\pi^D e^{-\kappa^2/4}$$

ここで, 以下の積分公式を用いた

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-p^2x^2} J_\nu(ax)dx = \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}} e^{-a^2/(4p^2)}$$

$\nu = D-1, a=\kappa, p=1$とした

構造因子の定義より, $\widehat{s}(\kappa) = 1 + \widetilde{\rho}\cdot\left(-\pi^D e^{-\kappa^2/4}\right) = 1 - e^{-\kappa^2/4}$

以上を(4.9)に代入することで $\mathrm{var}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{2\pi^D\widetilde{\rho}}{\Gamma(D)}\int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa}\widehat{s}(\kappa)d\kappa = \frac{2R^{2D}}{\Gamma(D)}\int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa}(1-e^{-\kappa^2/4})d\kappa$ ■

5. $\mathbb{C}^D$ 上Heisenberg点過程族の数分散

5.1 $\mathbb{C}^D$ 上Heisenberg点過程族の数分散の厳密表式の証明 (proof of Proposition 1.2)

Proposition 1.2 : D次元複素数空間 $\mathbb{C}^D$ 上のHeisenberg点過程族$(\Xi_{\mathrm{H}_D}, K_{\mathrm{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$, $D \in \mathbb{N}$ においては次が成り立つ

再掲

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{R^{2D} e^{-2R^2}}{D!} \left[I_0(2R^2) + 2\sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2) \right], \quad R > 0.$$

証明 : Proposition 4.7 の (4.13)より, 積分部に注目して計算を行う(積分部を A_n とする)

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{2R^{2D}}{(D-1)!} \int_0^\infty \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa = \frac{2R^{2D}}{(D-1)!} A_D(R),$$

$$A_n(R) := \int_0^\infty \frac{J_n(\kappa R)^2}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa = \int_0^\infty \frac{J_n(\kappa R)^2}{\kappa^{2n-1}} \cdot \kappa^{2n-2} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (5.1)$$

(5.1)について 部分積分を行う

$$\begin{aligned} A_n(R) &= \int_0^\infty \frac{J_n(\kappa R)^2}{\kappa^{2n-1}} \cdot \kappa^{2n-2} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa \\ &= \left[-\frac{\left(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2\right)}{2\,(2n-1)} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right]_0^\infty \\ &\quad + \frac{1}{2\,(2n-1)} \int_0^\infty \frac{\left(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2\right)}{\kappa^{2n-2}} \left[\frac{d}{d\kappa} \left\{ \kappa^{2n-2} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right\} \right] d\kappa \qquad (5.2) \end{aligned}$$

部分積分を行うにあたり, 以下の公式を用いた.

$$\int \frac{J_\nu(ax)^2}{x^{2\nu-1}} dx = -\frac{1}{2(2\nu-1)} \frac{J_\nu(ax)^2 + J_{\nu-1}(ax)^2}{x^{2(\nu-1)}}$$

$\nu = n$ として計算を行う

5.1 $\mathbb{C}^D$上Heisenberg点過程族の数分散の厳密表式の証明 (proof of Proposition 1.2)

$$A_n(R) = \left[-\frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{2(2n-1)} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right]_0^\infty + \frac{1}{2(2n-1)} \int_0^\infty \frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{\kappa^{2n-2}} \left[\frac{d}{d\kappa} \left\{ \kappa^{2n-2} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right\} \right] d\kappa$$

第１項の$[\cdots]_0^\infty$ について, $\kappa \to \infty$のとき

$$J_\nu(\kappa) \approx \sqrt{2/(\pi\kappa)} \cos(\kappa - \nu\pi/2 - \pi/4)$$

$\kappa = 0$のとき

$$J_0(0) = 1, \; J_\nu(0) = 0, \; \nu \neq 0$$

よって$[\cdots]_0^\infty$は0 → 第2項のみが残る

$[\cdots]_0^\infty$の微分について,

$$\frac{d}{d\kappa} \left[\kappa^{2(n-1)} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) \right] = 2(n-1)\kappa^{2(n-1)-1} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) + \frac{1}{2} \kappa^{2(n-1)+1} e^{-\kappa^2/4}$$

が成り立つ

よって$A_n(R)$は

$$A_n(R) = \frac{1}{2(2n-1)} \int_0^\infty \frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{\kappa^{2n-2}} \left[(2n-2)\kappa^{2n-3} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) + \frac{\kappa^{2n-1}}{2} e^{-\kappa^2/4} \right] d\kappa$$

$$= \frac{n-1}{2n-1} \int_0^\infty \frac{(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2)}{\kappa} \left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa$$

$$+ \frac{1}{4(2n-1)} \int_0^\infty \kappa \left(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2\right) e^{-\kappa^2/4} d\kappa$$

5.1 $\mathbb{C}^D$上Heisenberg点過程族の数分散の厳密表式の証明 (proof of Proposition 1.2)

$$A_n(R) = \frac{n-1}{2n-1}\int_0^\infty \frac{\left(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2\right)}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa + \frac{1}{4(2n-1)}\int_0^\infty \kappa\left(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2\right) e^{-\kappa^2/4} d\kappa$$

$A_n(R)$の定義より,

$$A_n(R) = \frac{n-1}{2n-1}\int_0^\infty \frac{\left(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2\right)}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa^2/4}\right) d\kappa$$

$$= \frac{n-1}{2n-1}A_n(R) + \frac{n-1}{2n-1}A_{n-1}(R)$$

両辺に$2n-1$をかけ, $A_n(R), A_{n-1}(R)$ を移項

第2項の積分は

$$\int_0^\infty \kappa\left(J_n(\kappa R)^2 + J_{n-1}(\kappa R)^2 e^{-\kappa^2/4} d\kappa\right.$$

$$= 2e^{-2R^2}\left[I_n(2R^2) + I_{n-1}(2R^2)\right]$$

ここで次の積分公式を用いた

$$\int_0^\infty x e^{-p^2x^2} J_\nu(ax)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2p^2} e^{-a^2/(2p^2)} I_\nu\left(\frac{a^2}{2p^2}\right), \quad \mathrm{Re}\nu > -1, \ \mathrm{Re}p^2 > 0$$

式を整理することにより，次の漸化式が得られる.

$$nA_n(R) - (n-1)A_{n-1}(R) = \frac{1}{2}e^{-2R^2}\left[I_n(2R^2) + I_{n-1}(2R^2)\right]$$

5.1 $\mathbb{C}^D$上Heisenberg点過程族の数分散の厳密表式の証明 (proof of Proposition 1.2)

したがって, この漸化式を解き, $n \to D$となおすことで,

$$DA_D(R) = \frac{1}{2}e^{-2R^2}\sum_{n=1}^{D}\left[I_n(2R^2) + I_{n-1}(2R^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2R^2}\left[I_0(2R^2) + 2\sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2)\right]$$

以上より, 数分散の厳密な表式は

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{2R^{2D}}{(D-1)!}\cdot\frac{1}{2D}e^{-2R^2}\left[I_0(2R^2) + 2\sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2)\right]$$

$$= \frac{R^{2D}e^{-2R^2}}{D!}\left[I_0(2R^2) + 2\sum_{n=1}^{D-1} I_n(2R^2) + I_D(2R^2)\right] \quad \blacksquare$$

5.2 $\mathbb{C}^D$ 上Heisenberg点過程族の数分散の別表式の証明 （proof of Remark 2）

Remark 2 : Heisenberg点過程 $(\Xi_{\mathrm{H}_D}, K_{\mathrm{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)}), D \in \mathbb{N}$ の数分散 $\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]$ は次の別表現をもつ

再掲 $$\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)}\left[1 - \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)}\, {}_2F_2(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2)\right]$$

${}_2F_2$ は一般化超幾何関数を表し, $(\alpha)_n$ はPochhammer 記号を表す

$${}_pF_q(a_1, \cdots, a_p; b_1, \cdots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} \qquad (a)_0 := 1,\ (a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1),\ n \in \mathbb{N}$$

証明 : $n = D \in \mathbb{N}$ に対し $A_D(R)$ を次のようにおく

$$A_D(R) = A_D^{(1)}(R) - A_D^{(2)}(R),\ A_D^{(1)}(R) = \int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} d\kappa,\ A_D^{(2)}(R) = \int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} e^{-\kappa^2/4} d\kappa$$

$A_D^{(1)}(R)$ は右の公式を用いて直ちに計算ができて,

$$A_D^{(1)}(R) = \frac{1}{2D}$$

以下の公式を $a = b = R,\ \nu = D$ として用いた $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(ax) J_\nu(bx)}{x} dx = \frac{(a/b)^\nu}{2\nu}$$

5.2 $\mathbb{C}^D$ 上Heisenberg点過程族の数分散の別表式の証明（proof of Remark 2）

$A_D^{(2)}(R) = \int_0^\infty \frac{J_D(\kappa R)^2}{\kappa} e^{-\kappa^2/4} d\kappa$ については, 下記の積分公式を用いて次のように計算できる.

$$A_D^{(2)}(R) = \frac{(2R)^{2D}}{2^{2D+1} D^2 \Gamma(D)} \ {}_2F_2\left(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2\right)$$

$$= \frac{R^{2D}}{2D^2\Gamma(D)} \ {}_2F_2\left(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2\right)$$

計算には次の公式を用いた（$a = R, \nu = D, p = 1/2$とした）

$$\int_0^\infty x^{-1} e^{-p^2x^2} J_\nu(ax)^2 dx = \frac{(a/p)^{2\nu}}{2^{2\nu+1}\nu^2\Gamma(\nu)} \ {}_2F_2\left(\nu, \nu+1/2; \nu+1, 2\nu+1; -(a^2/p^2)\right)$$

以上より, 数分散は

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathrm{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{2R^{2D}}{\Gamma(D)} A_D(R) = \frac{2R^{2D}}{\Gamma(D)}\left[\frac{1}{2D} - \frac{R^{2D}}{2D^2\Gamma(D)} \ {}_2F_2\left(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2\right)\right]$$

$$= \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)}\left[1 - \frac{R^{2D}}{\Gamma(D+1)} \ {}_2F_2(D, D+1/2; D+1, 2D+1; -4R^2)\right] \quad \blacksquare$$

6. $\mathbb{C}^D$上Heisenberg点過程族の超一様性の証明と漸近展開（proof of Theorem 1.3）

Therorem1.3： Heisenberg点過程族$(\Xi_{\mathsf{H}_D}, K_{\mathsf{H}_D}, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})$,$D \in \mathbb{N}$ は, $R \to \infty$ において次が成り立つ

再掲

$$\lim_{R\to\infty} R \frac{\mathrm{var}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]} = \frac{D}{\sqrt{\pi}}$$

したがって, すべての $D \in \mathbb{N}$ において Class I の超一様性を有する. さらに $R \to \infty$ において次の漸近展開が成り立つ

$$\frac{\mathrm{var}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]} \sim \frac{D}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(D)}{(2k+1)k!2^{4k}} R^{-2k} \quad \text{as } R \to \infty$$

証明 : $\beta_k(D)$ を次のように定義する

$$\beta_k(D) := \alpha_k(0) + 2\sum_{n=1}^{D-1} \alpha_k(n) + \alpha_k(D)$$

ここで $\alpha_k(D)$は

$$\alpha_k(D) = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0, \\ \displaystyle\prod_{\ell=-k+1}^{k} (2D + 2\ell - 1) & \text{if } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

6. $\mathbb{C}^D$ 上Heisenberg点過程族の超一様性の証明と漸近展開 （proof of Theorem 1.3）

Proposition1.2 の表式に対して，右下の公式を適用すると，

$$\mathrm{var}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})] \sim \frac{R^{2D}e^{-2R^2}}{D!}\left[\frac{e^{2R^2}}{(2\pi\cdot 2R^2)^{1/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k}{k!2^{3k}}\cdot(2R^2)^{-k}\left(\alpha_k(0)+2\sum_{n=1}^{D-1}\alpha_k(n)+\alpha_k(D)\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{R^{2D-1}}{2\sqrt{\pi}D!}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k\beta_k(D)}{k!2^{4k}}\cdot R^{-2k}\right]$$

以下の公式を適用した

$$I_\nu(x)\sim\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\alpha_k(\nu)}{k!2^{3k}}x^{-k},\quad \text{as } x\to\infty$$

$k=0$ とすると

$$\beta_0(D)=\alpha_0(0)+2\sum_{n=1}^{D-1}\alpha_0(n)+\alpha_k(D)=1+2\sum_{n=1}^{D-1}1+1=2D$$

Proposition 4.7より

$$\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]=\frac{R^{2D}}{D!}$$

したがって, $\mathrm{var}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]/\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]$ の極限は

$$\lim_{R\to\infty}R\frac{\mathrm{var}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]}\sim R\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}R^{-1}(-1)^0\frac{\beta_0^{(D)}}{0!2^{4\cdot 0}}=\frac{D}{\sqrt{\pi}}$$

$\boxed{\text{Class I の超一様性を持つことが示された}}$

6. $\mathbb{C}^D$上Heisenberg点過程族の超一様性の証明と漸近展開（proof of Theorem 1.3）

$\alpha_k(n)$について次の関係式が成り立つ.

$$\alpha_k(n+1) = \prod_{\ell=-k+1}^{k} \{2(n+1)+2\ell-1\} = \prod_{\ell'=-k+2}^{k+1} (2n+2\ell'-1) = \frac{2n+2k+1}{2n-2k+1}\alpha_k(n), \ n \in \mathbb{N}_0$$

この式は $(2n+2k+1)\alpha_k(n) = (2n-(2k-1))\alpha_k(n+1)$ と変形できる. さらにこの式を整理すると

$$\begin{aligned}
(2n+2k+1)\alpha_k(n) &= (2n-(2k-1))\alpha_k(n+1) \\
\iff (2k+1)(\alpha_k(n)+\alpha_k(n+1)) &= 2(n+1)\alpha_k(n+1) - 2n\alpha_k(n) \\
\iff (\alpha_k(n)+\alpha_k(n+1)) &= 2\left((n+1)\alpha_k(n+1) - n\alpha_k(n)\right)/(2k+1)
\end{aligned}$$

$D\alpha_k(D)$の項以外はすべて隣接項同士でキャンセルする

この式の両辺に対し, 0 から $D-1$ までの和をとると

$$\sum_{n=0}^{D-1}(\alpha_k(n)+\alpha_k(n+1)) = \sum_{n=0}^{D-1} \frac{2\left[(n+1)\alpha_k(n+1) - n\alpha_k(n)\right]}{2k+1}$$

$$= \frac{2}{2k+1}\left[(\alpha_k(1)-0) + (2\alpha_k(2)-\alpha_k(1)) + \cdots + (D\alpha_k(D) - (D-1)\alpha_k(D-1))\right] = \frac{2D}{2k+1}\alpha_k(D)$$

和について次が成り立つ.

$$\sum_{n=0}^{D-1}(\alpha_k(n)+\alpha_k(n+1)) = \alpha_k(0) + 2\sum_{n=1}^{D-1}\alpha_k(n) + \alpha_k(D)$$

よって, $\beta_k(D)$は次のようにかける

$$\beta_k(D) = \alpha_k(0) + 2\sum_{n=1}^{D-1}\alpha_k(n) + \alpha_k(D) = \frac{2D}{2k+1}\alpha_k(D)$$

6. $\mathbb{C}^D$上Heisenberg点過程族の超一様性の証明と漸近展開（proof of Theorem 1.3）

したがって $\mathrm{Var}[\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}(\mathbb{B}_R^{2D})]/\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}(\mathbb{B}_R^{2D})]$ は

$$\frac{\mathrm{var}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathsf{H}_D}(\mathbb{B}_R^{2D})]} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\beta_k(D)}{k! 2^{4k}} R^{-2k} = \frac{D}{\sqrt{\pi}} R^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k(D)}{(2k+1)k! 2^{4k}} R^{-2k} \qquad \blacksquare$$

注1: 漸近展開した際の各項の係数は次のとおりである（$k = 0,1,2,3$）

$$\gamma_k^{(D)} := \frac{\alpha_k(D)}{(2k+1)k!2^{4k}}$$

$$\gamma_0^{(D)} = \frac{\alpha_0(D)}{1 \cdot 0! 2^0} = 1,$$

$$\gamma_1^{(D)} = \frac{\alpha_1(D)}{1 \cdot 1! 2^4} = \frac{1}{3 \cdot 2^4}(2D-1)(2D+1),$$

$$\gamma_2^{(D)} = \frac{\alpha_2(D)}{2 \cdot 2! 2^8} = \frac{1}{5 \cdot 2! \cdot 2^8}(2D-3)(2D-1)(2D+1)(2D+3),$$

$$\gamma_3^{(D)} = \frac{\alpha_3(D)}{3 \cdot 3! 2^{12}} = \frac{1}{7 \cdot 3! \cdot 2^{12}}(2D-5)(2D-3)(2D-1)(2D+1)(2D+3)(2D+5).$$

ご清聴、ありがとうございました

Matsui,T., Katori,M., Shirai,T.,
“ Local number variances and hyperuniformity of the Heisenberg family of determinantal point processes, arXiv:math-ph/2012.10585 “

A. Heisenberg点過程の表現論

$\mathbb{R}^D, D \in \mathbb{N}$における1粒子の量子力学的運動について考える.
位相空間は座標 $(p, q) = (p_1, \dots, p_D, q_1, \dots, q_D)$ を持つ空間 R^{2D} で与えられる
→ ここに時間τを加えたR^{2D+1} の位相空間 $(p, q, \tau) = (p_1, \dots, p_D, q_1, \dots, q_D, \tau)$ を考え,
Heisenberg Lie algebra $\mathfrak{h}_D$ を Lie bracket により定義される交換関係で定める

$$[(p, q, \tau), (p', q', \tau')] = (0, 0, p \cdot q' - q \cdot p') = (0, 0, [(p, q), (p', q')])$$

Heisenberg 群 H_Dは $XX' = X + X' + \frac{1}{2}[X, X'],\ X, X' \in \mathbb{R}^{2D+1}$ の群則を満たす, 次のような$\mathbb{R}^{2D+1}$ 上のLie 群である

$$(p, q, \tau)(p', q', \tau') = \left(p + p', q + q', \tau + \tau' + \frac{1}{2}(p \cdot q' - q \cdot p')\right)$$

ここで, $L^2(\mathbb{R}^D)$を $\mathbb{R}^D$ 上の2乗可積分な関数全体の集合とし, その内積を次のようにする

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)} := \int_{\mathbb{R}^D} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} d\zeta, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^D)$$

なめらかな関数f に対し, 演算子$\mathrm{X}_i, \mathcal{D}_i$ を以下のように定義する

$$(X_i f)(\zeta) = \zeta_i f(\zeta), \quad (\mathcal{D}_i f)(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}(\zeta), \quad i = 1, \dots, D$$

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_D) \in \mathbb{R}^D$

$\mathbb{R}^D$上のLebsgue測度: $d\zeta$

演算子の交換関係は

$$[X_i, \mathcal{D}_j] = \frac{\sqrt{-1}}{2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, D$$

これは量子力学における
正準交換関係($\hbar$ = 1/2 としたもの)

A. Heisenberg点過程の表現論

$\mathrm{X}:=(\mathrm{X}_1,\ldots,X_D)$, $\mathcal{D}:=(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_D)$, Iを恒等写像演算子とし,下記で定義される H_Dから$L^2(\mathbb{R}^D)$への
ユニタリー演算子の群への写像を考える

$$\rho(p,q,\tau)=e^{2\sqrt{-1}(p\cdot\mathcal{D}+qX+\tau I)}$$

これは次のように表すことができる

$$\rho(p,q,\tau)f(\zeta)=e^{2\sqrt{-1}\tau+2\sqrt{-1}q\cdot\zeta+\sqrt{-1}p\cdot q}f(\zeta+p),\quad f\in L^2(\mathbb{R}^D)$$

この写像ρ は H_D のSchrödinger 表現とよばれる

・$(f,g)\in(L^2(\mathbb{R}^D))^2$における行列の係数を計算すると, 次の表現を得る

$$M_{f,g}(p,q,\tau):=\langle\rho(p,q,t)f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)}$$

$$=e^{2\sqrt{-1}\tau}\int_{\mathbb{R}^D}e^{2\sqrt{-1}q\cdot\zeta}f\left(\zeta+\frac{p}{2}\right)\overline{g\left(\zeta-\frac{p}{2}\right)}d\zeta,\quad f,g\in L^2(\mathbb{R}^2)\qquad \text{(A. 1)}$$

これを Fourier-Wigner 変換という.

$f_1,f_2,g_1,g_2\in L^2(\mathbb{R}^D)$に対し, $L^2(\mathbb{R}^{2D})$における内積は

$$\langle M_{f_1,g_1},M_{f_2,g_2}\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2D})}:=\int_{\mathbb{R}^D}dp\int_{\mathbb{R}^D}dq\,M_{f_1,g_1}(p,q)\overline{M_{f_2,g_2}(p,q)}$$

$$=\pi^D\langle f_1,f_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)}\overline{\langle g_1,g_2\rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)}}\qquad \text{(A. 2)}$$

A. Heisenberg点過程の表現論

$g_1(\zeta)$, $g_2(\zeta)$を次のようにおき, (A. 3)のように複素変数を定義すると

$$g_1(\zeta) = g_2(\zeta) = \frac{1}{\pi^{D/2}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{D/4} e^{-\zeta^2}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^D$$

$$x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(D)}) := p + \sqrt{-1}q = (p_1 + \sqrt{-1}, \ldots, p_D + \sqrt{-1}q_D) \in \mathbb{C}^D \qquad (A.\,3)$$

(A. 1), (A. 2)は次のようになる.

$$M_{f,\phi_0}(p, q, \tau) = e^{2\sqrt{-1}\tau} \frac{e^{-|x|^2/2}}{\pi^{D/2}} \mathsf{B}[f](x) \qquad (A.\,4)$$

$$\begin{aligned} \langle M_{f_1,\phi_0}, M_{f_2,\phi_0} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2D})} &= \langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^D)} \\ &= \langle \mathsf{B}[f_1], \mathsf{B}[f_2] \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})}, \quad f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^D) \qquad (A.\,5) \end{aligned}$$

ここで,$\mathsf{B}[f]$はBargmann 変換 とよばれる

$$\mathsf{B}[f](x) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{D/4} \int_{\mathbb{R}^D} f(\zeta) e^{2\zeta \cdot x - \zeta^2 - x^2/2} d\zeta, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^D) \qquad (A.\,6)$$

$\mathbb{C}^D$上の参照測度は(1.4)で定義されているため

$$\langle F_1, F_2 \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} := \int_D F_1(x) \overline{F_2(x)} \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)}(dx)$$

$f \in L^2(\mathbb{R}^D)$に対して, (A. 6)の積分は$\mathbb{C}^D$上のコンパクトな部分集合中の x に対して一様に収束
→ $\mathsf{B}[f]$ は $\mathbb{C}^D$上の整関数(正則関数)

2乗ノルムは

$$\|F\|_{L^2(^D, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} := \sqrt{\langle F, F \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})}}$$

A. Heisenberg点過程の表現論

Bargmann-Fock 空間 を次のように定義する.

$$\mathcal{F}_D := \left\{ F : F \text{ is entire on } \mathbb{C}^D \text{ and } \|F\|_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} < \infty \right\}$$

このとき, (A. 5)は,Bargmann変換が$L^2(\mathbb{R}^D)$から$\mathcal{F}_D$への等長写像であることを表す
(A. 4)は $\mathrm{H}_D \ni (p,q,\tau)$ が(A. 3)を用いた $e^{2\sqrt{-1}\tau}\mathsf{B}[f](x),\ f \in L^2(\mathbb{R}^D)$ によって表現される → これをH_DのBargmann – Fock 表現とよぶ

$\mathcal{F}_D$に対する完備正規直交系(CONS): $\varphi_n(x) := \dfrac{x^n}{\sqrt{n!}}, \quad n \in \mathbb{N}_0^D, \quad x \in \mathbb{C}^D$

この系の内積: $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{L^2(\mathbb{C}^D, \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)})} = \delta_{nm} := \prod_{i=1}^{N} \delta_{n_i m_i}, \ n, m \in \mathbb{N}_0^D$

$n = (n^{(1)}, \dots, n^{(D)}) \in \mathbb{N}_0^D$

$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(D)}) \in \mathbb{C}^D$

に対し, 次のような多変数表記を用いた

$n! := \prod_{\ell=1}^{D} n^{(\ell)}!, \ \ x^n := \prod_{\ell=1}^{D} (x^{(\ell)})^{n^{(\ell)}}$

したがって, $k_y(x) := \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}_0^D} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)} = \prod_{i=1}^{D} \sum_{n_i \in \mathbb{N}_0} \frac{x_i^{n_i} \overline{y_i}^{n_i}}{n_i!} = \prod_{i=1}^{D} e^{x_i \overline{y_i}}$

$$= e^{x \cdot \overline{y}}$$

を定義したならば, これは $\mathcal{F}_D$ における再生核となる. これはDefinition1.1のK_{H_D}の定義と同じ
→これがHeisenberg点過程の名前の由来

Heisenberg 群
→ Schrödinger 表現
→Bargmann-Fock 表現
→ Bargmann-Fock 空間の再生核