

感染症モデルで使われる微分方程式 について

中央大学 理工学部物理学科四年 香取研究室

森澤良樹

はじめに

今年世界情勢に多大な影響を与えたコロナウイルス、その感染拡大を抑えるために人との接触を8割減らすという話は恐らく誰もが聞いたことがあるだろう。ここで気になるのが「8割」という具体的な数字である。どういう理屈で8割減という結論に至ったのであろうか？

その答えは微分方程式だ。微分方程式から流行を予想し、さらに感染拡大しないための案を導いたわけである。

ここではその微分方程式が一体どういう理屈に沿って表されるのか、単純な条件による流行モデルから順を追って説明しようと思う。

最も単純なケース(SIRモデル)

簡単なところから議論を開始するため

条件1：非常に短期的な流行(感染症以外での人口の変動はない)。

条件2：一度感染症から回復した場合、免疫を獲得(再感染はない)。

という条件でモデルを考える。これは非常に短期的な流行をする伝染病でよく使われるモデルである。

まず母集団を $S(t)$ (感染する可能性のある人)、 $I(t)$ (感染者かつ感染性のある人)、 $R(t)$ (免疫獲得や死亡等で感染する可能性のない人)に分類する。

条件1より

$$S(t)+I(t)+R(t)=N(\text{定数}) \quad \dots(1)$$

と表すことができる[1]。

続いてS(t)、I(t)、R(t)がどのように遷移するかを考える。感染者が増えることは、数学的にはS(t)が減りその分I(t)が増えることになる。このS(t)の減少率は以下のような論理で数式に表すことができる。

- ・ 感染性のある人が多いほど、感染者は増加しやすくなる。
→S(t)の減少率はI(t)に比例。
- ・ 感染する可能性のある人が多いほど、感染者は増加しやすくなる。
→I(t)の減少率はS(t)に比例。

これは直感的にも理解できるはずである。したがって

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad \dots(2)$$

という方程式として表すことができる(βは比例定数)。感染のしやすさは年齢や環境、体質等によって変わるが、係数βはその平均を取った「感染率」とみなせる。

同様にR(t)についても、感染者が多いほど、免疫獲得(死亡)者も増えやすくなるために

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad \dots(3)$$

と表せる(γ は比例定数)。この γ も β と同様に感染者が感染性のなくなる平均確率であり、回復率や隔離率などと呼ばれる。

最後にI(t)の変化率であるが、(1)を時間微分すると

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$$

となり、後はこの式と(2)(3)より

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad \dots(4)$$

とI(t)の時間変化を導ける。(4)が負の値になれば感染者は減っていき、感染者は拡大しない。8割減という具体的数字は、各パラメータをデータから解析して出たものである。

SIRモデルの図示

N, β, γ を適当に仮定し、SIRモデルにおける $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ の推移を曲線で表した。直感的にも理解はできると思うが、感染率が低かったり、治癒・死亡率が高いほど感染症は広がりにくいということがわかる。

図1 SIRモデル($N=1000, \beta=0.0017, \gamma=0.8$)

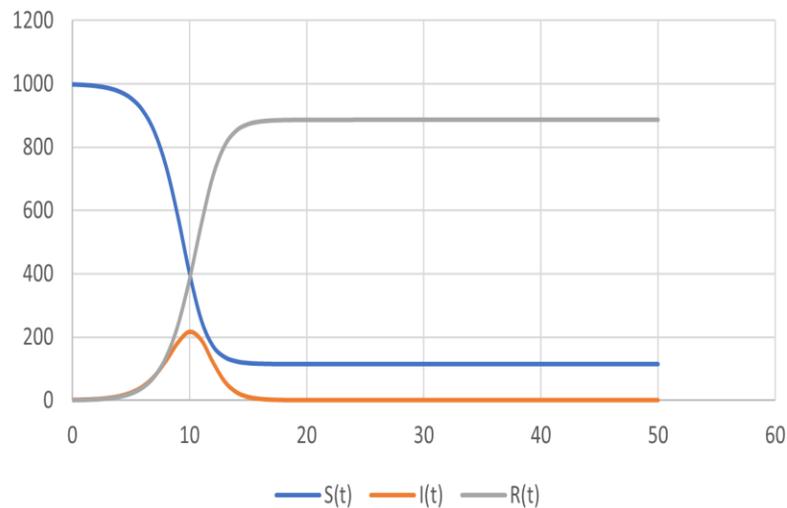


図2 SIRモデル($N=1000, \beta=0.0017, \gamma=0.4$)

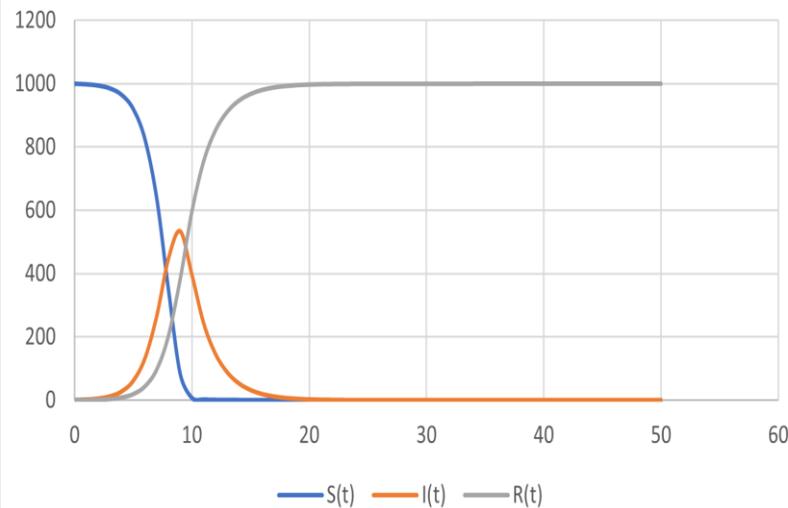
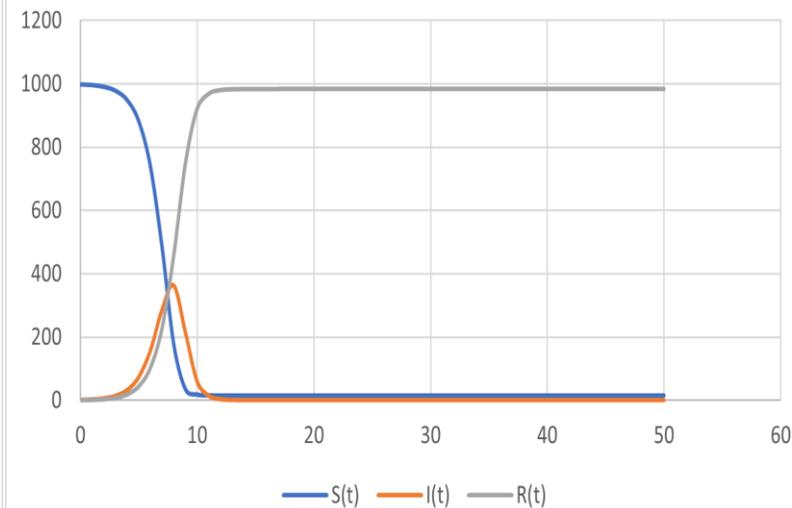


図3 SIRモデル($N=1000, \beta=0.0022, \gamma=0.8$)



流行が長期的になる場合

流行が長期的になると、新たに生まれる命や、感染症以外での死亡も考慮しなくてはならない。その場合はSIRモデルによる微分方程式(2)(4)(3)を以下のように修正する。

$$\frac{dS(t)}{dt} = \varepsilon N(t) - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \quad \dots(2)'$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\mu I(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad \dots(4)'$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\mu R(t) + \gamma I(t) \quad \dots(3)'$$

ここで ε は普通出生率、 μ は感染症以外での死亡率である。

新生児は全て未感染者なので全て $S(t)$ に区分され、母集団 $N(t)$ に比例して増加。自然死は $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 全ての区分で同等確率で起こるのえ d 、それぞれがそれぞれに比例して減少する。

このモデルを扱う時、 $N(t)$ は動的平衡受胎(流入と流出の量が同じで、全体としては時間変化していない系)とすることが多い。その際は $\varepsilon = \mu$ として考え、 N を一定値として見るので(1)も成立する[1][2]。

また、このモデルでは感染症による死亡者と回復者を一緒に考えているが、別々に考える場合は(4)'に感染症による死亡者 $-\alpha I(t)$ というのも加えるといい。

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\mu I(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \alpha I(t)$$

この時、 $R(t)$ は免疫獲得者数のみを表す変数となり、 α は感染症による死亡者である。

ワクチンができた場合

感染症にワクチンが完成すれば、 $S(t)$ が $I(t)$ を介さずに $R(t)$ へと遷移することが可能となる。新生児に v 、新生児以外の $S(t)$ に w の確率でワクチンを接種したとすると

$$\frac{dS(t)}{dt} = (1-v)\epsilon N(t) - wS(t) - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) \quad \dots(2)''$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = v\epsilon N(t) + wS(t) - \mu R(t) + \gamma I(t) \quad \dots(3)''$$

となる[1][2]。ただし v 、 w は共に0から1の実数となる。ワクチンの接種確率に応じて $S(t)$ の増加量が減少し、その分 $R(t)$ が増加する式となっている。

$I(t)$ の変化率(4)'は変わっていないが、 $S(t)$ の減少率が大きくなっている分、 $I(t)$ の値もワクチン接種しない場合より小さくなる。

人口動態・ワクチン接種を考慮した曲線図

人口動態やワクチンの効果を考慮した微分方程式を図示すると図4,図5のようになる。
($\epsilon=\mu=0.07$, $v=w=0.03$, $N=1000$, $\beta=0.0017$, $\gamma=0.8$)

係数の値によって変わるのであくまで一例ではあるが、全く考慮しない場合(図1)と比べて異なる曲線を描いていることが分かる。

図1 SIRモデル($N=1000, \beta=0.0017, \gamma=0.8$)

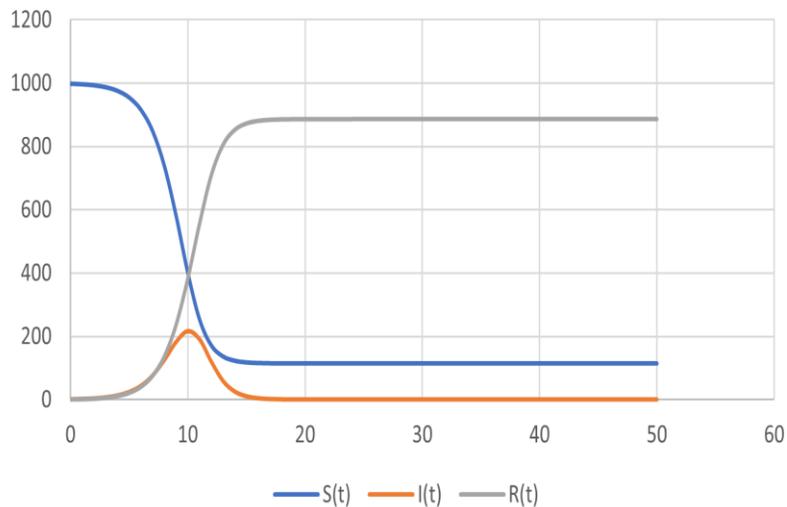


図4, SIRモデル+人口動態

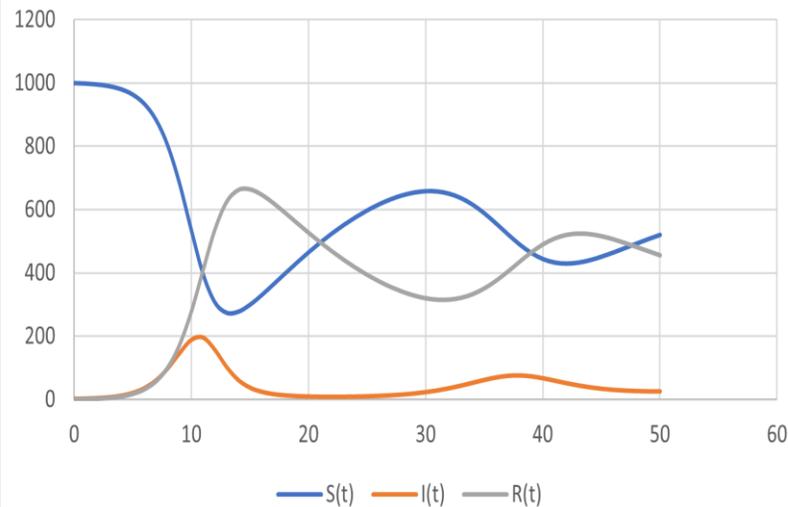
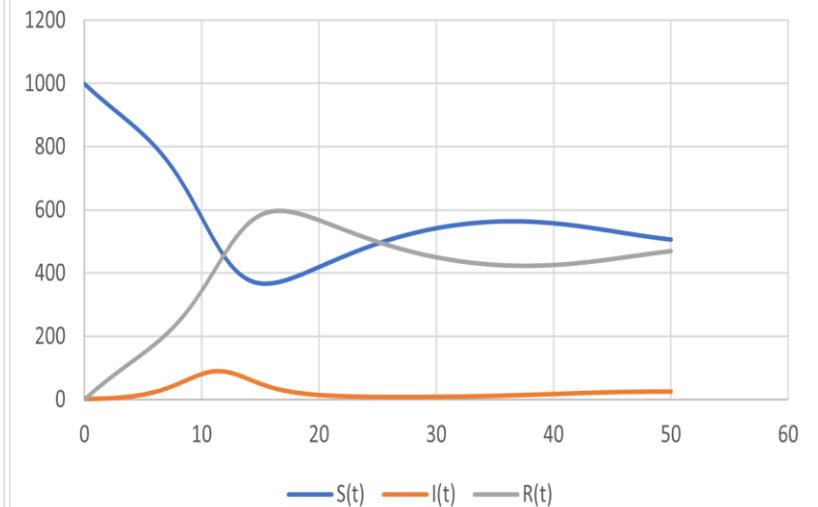


図5 SIRモデル+人口動態+ワクチン接種



潜伏期間の考慮(SEIRモデル)

ウイルスは感染してすぐ症状が出るというわけではなく、中には一定の期間が経ってから症状の出るものも存在する。

そのような時間遅れを考慮するのがSEIRモデルである。最初のSIRモデルにE(t)(感染しているが完成性のない人)という区分を加えると

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \delta E(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \delta E(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t)$$

という微分方程式が導ける[3]。これはS(t)が感染してE(t)に遷移した後、一定確率 δ でI(t)へ遷移することを表している。このモデルでもSIRモデルと同様に出生率、自然死亡率、ワクチン接種率を考慮することができる。

免疫獲得が永続しない場合(SISモデル)

これまでは感染症から回復したら免疫を獲得する、という前提で話を進めていたが、全ての感染症がそうというわけではない。免疫を獲得できない感染症に対する流行モデルがSISモデルである[4]。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t)$$

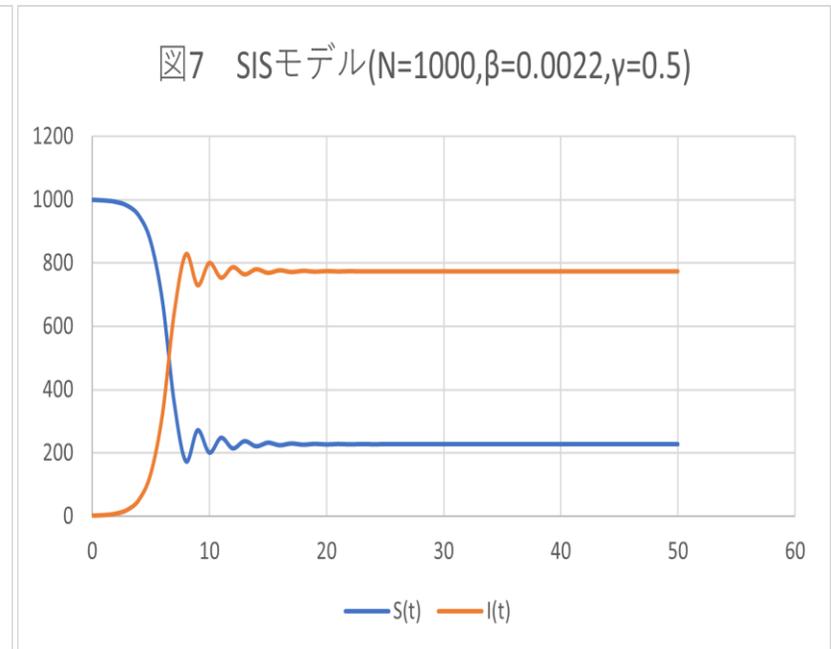
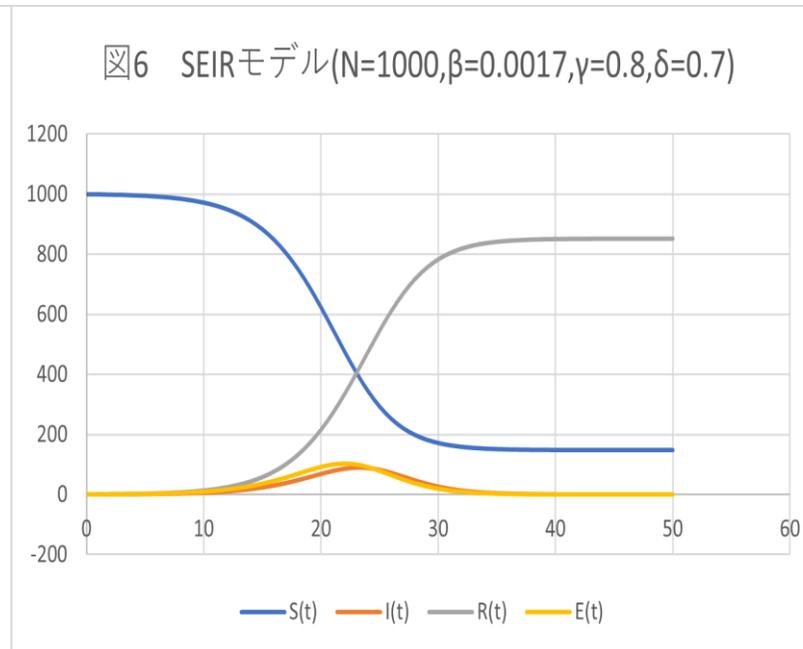
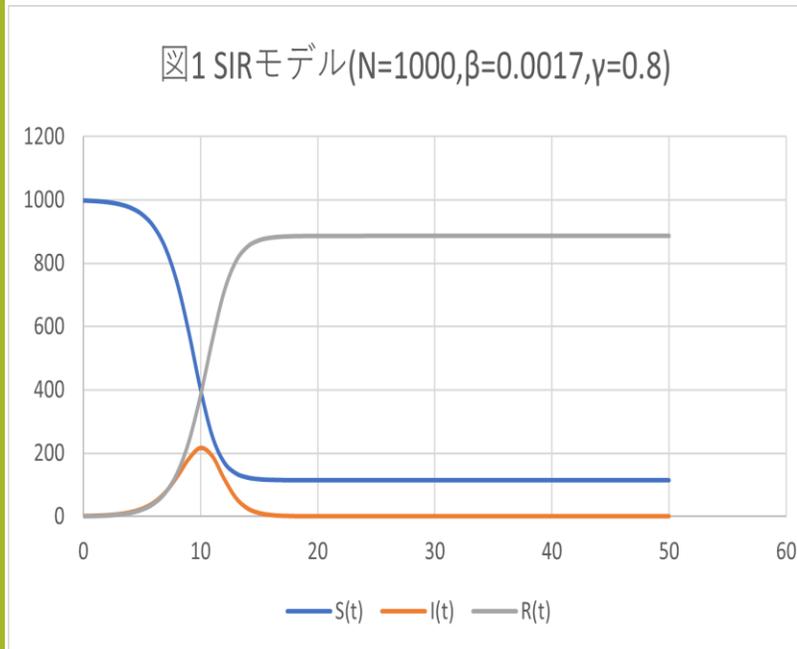
$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

方程式を見れば分かる通り、感染症から回復した人は再び感染する可能性のある集団 $S(t)$ へと遷移する。

SEIRモデル、SISモデルの図示

これらを図示すると図6、図7のようになる。図6は潜伏期間を考慮したためか、図1と比べて緩やかな曲線となっている。

一方図7は、最終的に新規感染者と回復者の数が変わらない動的平衡状態にたどり着く。SISモデルでは、 $I(t)$ が収束する様子のない推移をすることが分かる。



さらに考慮すべき条件は？

ここまで紹介してきたものは感染症モデルのほんの一部であり、他にも以下のような条件を考えることもできる。

例) 年齢や性別によって感染率・治癒率に大きな差がある場合は？

ワクチンや治癒で得られた免疫が永続しない場合は？

感染性のある無症状者も存在する場合は？

虫や動物の媒介によって広がる感染症の場合は？

気候(季節)によって感染率が変動する場合は？

これらの条件を考慮する必要があるれば、微分方程式モデルもSIRモデルを基礎として様々な修正が加えられる。感染症の特徴を適切に把握し、柔軟に対応することが数理モデルを作る上で重要と言える。

参考文献

- [1] 稲葉寿 微分方程式と感染症数理疫学 数理理科学 NO. 538, APRIL 2008 (https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~inaba/inaba_science_2008.pdf)
- [2] 石川昌明 時間遅れを考慮した確率SIRモデルの安定性解析 システム成語情報学会論文誌, Vol.30, No.4, pp.115-121 2017 (https://www.jstage.jst.go.jp/article/iscie/30/4/30_115/_pdf)
- [3] 西浦博・稲葉寿 感染症流行の予測：感染症数理モデルにおける定量的課題 統計数理研究所 統計数理(2006)第54巻第2号 461-480 改定2006年2月6日 (<https://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/pdf/54-2-461.pdf>)
- [4] 佐々木徹 拡散効果のある SIS 感染症モデルの局所対策について 数理解析研究所講究録 1372 巻 2004 年 123-127 (<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1372-19.pdf>)
- [5] 長田直樹 区画に無症状感染者を持つ感染症の数理モデル 東京女子大学 2020年7月23日 Version 1.4 (https://www.lab.twcu.ac.jp/~osada/math_model/math_model.pdf)