ハイゼンベルク点過程の超一様性について *

松井　貴都（中央大学理工学部）†

22 November 2020

1　超一様性 (hyperuniformity) とは

強相関多粒子系において, 大規模スケールにおける密度ゆらぎが異常に抑制されているとき, その系は超一様状態 (hyperuniform state) にあるという. 超一様性 (hyperuniformity) に関して, 近年, 物性物理学において盛んに研究がなされている [1]. 本講演では, Heisenberg 点過程族とよばれる行列式点過程の 1 径族 (径数は次元 $D \in \mathbb{N}$)[2] に対して, その超一様性を調べた結果を報告する.

d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d (d \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\})$, あるいは D 次元複素空間 $\mathbb{C}^D (D \in \mathbb{N})$ を基本空間 S とし, 参照測度 $\lambda(dx)$ を与える. この S 上に, 並進移動不変な無限点過程 Ξ を考える. $S = \mathbb{R}^d$ のとき, 半径 R の球 $\mathbb{B}_R^d$ を用意する. $\mathbb{B}_R^d$ 内に含まれる点の数の平均値 $\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)]$ は, この球の体積 $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_R^d)$ と数密度 $\widetilde{\rho}$ を用いて $\widetilde{\rho}\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_R^d)$ と表せる. したがって $\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^d$ となる. 次に, 分散 $\mathrm{Var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] := \mathbf{E}[(\Xi(\mathbb{B}_R^d) - \mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)])^2]$ を考える. これはスケール R の領域内の点の個数の分散を表す (これを数分散とよぶ). 点過程 Ξ がポアソン点過程のような無相関点過程の場合には, $R \to \infty$ において $\mathrm{Var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp \mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^d$ である. それに対して, $\mathrm{Var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)]$ の R 依存性が, $R \to \infty$ において d よりも低い次元性しかもたず, 次が成り立つとき, 点過程 Ξ は超一様性をもつと定義することにする.

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\mathrm{Var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)]}{\mathbf{E}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)]} = 0.$$

Torquato [1] に従うと, 超一様性は $R \to \infty$ における数分散の挙動によって, 次の 3 つのクラスに分類される.

$$\begin{aligned}
&\text{Class I :} && \mathrm{Var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^{d-1}, \\
&\text{Class II :} && \mathrm{Var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^{d-1}\log R, \\
&\text{Class III :} && \mathrm{Var}[\Xi(\mathbb{B}_R^d)] \asymp R^{d-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.
\end{aligned}$$

2　Heisenberg 点過程族

Heisenberg 点過程族は, $\mathbb{C}$ 上の Ginibre 点過程を $\mathbb{C}^D, D \in \mathbb{N}$ 上に拡張した行列式点過程である [2]. $S = \mathbb{C}^D, D \in \mathbb{N}$ のとき, $x \in S$ の D 個の成分 $x = (x_1, \dots, x_D)$ はそれぞれ, $x_i = \mathrm{Re}x_i + \sqrt{-1}\mathrm{Im}x_i, i = 1, \dots, D$ と表される. ここでは, この複素構造を明示するため, $x_\mathrm{R} = (\mathrm{Re}x_1, \dots, \mathrm{Re}x_D) \in \mathbb{R}^D, x_\mathrm{I} = (\mathrm{Im}x_1, \dots, \mathrm{Im}x_D) \in \mathbb{R}^D$ として, $x = x_\mathrm{R} + \sqrt{-1}x_\mathrm{I}$ と書くことにする. Lebesgue 測度を $dx = dx_\mathrm{R} dx_\mathrm{I} := \prod_{i=1}^D d\mathrm{Re}x_i d\mathrm{Im}x_i$ とする. $x = x_\mathrm{R} + \sqrt{-1}x_\mathrm{I}, y = y_\mathrm{R} + \sqrt{-1}y_\mathrm{I} \in \mathbb{C}^D$ に対して, 標準 Hermite 内積を

$$x \cdot \overline{y} = (x_\mathrm{R} + \sqrt{-1}x_\mathrm{I}) \cdot (y_\mathrm{R} - \sqrt{-1}y_\mathrm{I}) = (x_\mathrm{R} \cdot y_\mathrm{R} + x_\mathrm{I} \cdot y_\mathrm{I}) - \sqrt{-1}(x_\mathrm{R} \cdot y_\mathrm{I} - x_\mathrm{I} \cdot y_\mathrm{R})$$

---

*本講演は香取眞理氏 (中央大学理工学部) との共同研究に基づく.

†Department of Physics, Faculty of Science and Engineering, Chuo University, Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551, Japan; e-mail: matsui@phys.chuo-u.ac.jp

と定義し, 2 乗ノルムは $|x|^2 := x \cdot \overline{x} = |x_{\mathrm{R}}|^2 + |x_{\mathrm{I}}|^2,\ x \in \mathbb{C}^D$ とする. 以上の設定から, $S = \mathbb{C}^D$ 内の半径 R の円板と $\mathbb{R}^d$ 内の半径 R の球 $\mathbb{B}^d_R$ は, $d = 2D$ の下で同一視できることが分かる. $\mathbb{C}$ 上の Ginibre 点過程における参照測度は $\lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C})}(dx) := e^{-|x|^2} dx/\pi$ であることから, これを拡張し, $S = \mathbb{C}^D$ 上の参照測度は次のものとする.

$$\lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C}^D)}(dx) := \prod_{i=1}^{D} \lambda_{\mathrm{N}(0,1;\mathbb{C})}(dx_i) = \frac{1}{\pi^D} e^{-|x|^2} = \frac{1}{\pi^D} e^{-(|x_{\mathrm{R}}|^2 + |x_{\mathrm{I}}|^2)}.$$

定義 2.1 $D \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathbb{C}^D$ 上の Heisenberg 点過程は, 相関核 $K_{\mathrm{H}}^{(D)}(x,y) = e^{x\overline{y}},\ x, y \in \mathbb{C}^D$ をもつ行列式点過程 $(\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}, K_{\mathrm{H}}^{(D)}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^D)})$ である.

3 主結果

定理 3.1 $\mathbb{C}^D$ 上の Heisenberg 点過程 $(\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}, K_{\mathrm{H}}^{(D)}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^D)}), D \in \mathbb{N}$ において次が成り立つ.

$$\mathrm{Var}[\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}(\mathbb{B}_R^{2D})] = \frac{R^{2D} e^{-2R^2}}{D!} \left[I_0\left(2R^2\right) + \sum_{n=1}^{D-1} I_n\left(2R^2\right) + I_D\left(2R^2\right) \right],\ R > 0.$$

ここで, $I_\nu(x)$ は第 1 種変形ベッセル関数を表す: $I_\nu(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(\nu+n+1)}$.

注 1　これは $D = 1$(Ginibre 点過程) に対する先行結果 [1] を一般化したものである.

定理 3.2 $\mathbb{C}^D$ 上の Heisenberg 点過程 $(\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}, K_{\mathrm{H}}^{(D)}, \lambda_{N(0,1;\mathbb{C}^D)}), D \in \mathbb{N}$ において

$$\lim_{R\to\infty} R \frac{\mathrm{Var}[\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}(\mathbb{B}_R^{2D})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}(\mathbb{B}_R^{2D})]} = \frac{D}{\sqrt{\pi}}$$

が成り立つ. したがって, すべての $D \in \mathbb{N}$ において Class I の超一様性をもつ. さらに, $R \to \infty$ において, 次のような漸近展開が成り立つ.

$$\frac{\mathrm{Var}[\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}(\mathbb{B}_R^{2D})]}{\mathbf{E}[\Xi_{\mathrm{H}}^{(D)}(\mathbb{B}_R^{2D})]} \sim \frac{D}{\sqrt{\pi} R} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma_n^{(D)}}{R^{2n}}.$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{(D)} &= 1, \\
\gamma_1^{(D)} &= \frac{1}{3 \cdot 2^4}(2D-1)(2D+1), \\
\gamma_2^{(D)} &= \frac{1}{5 \cdot 2! \cdot 2^8}(2D-3)(2D-1)(2D+1)(2D+3), \\
\gamma_3^{(D)} &= \frac{1}{7 \cdot 3! \cdot 2^{12}}(2D-5)(2D-3)(2D-1)(2D+1)(2D+3)(2D+5).
\end{aligned}$$

注 2　$\gamma_n^{(D)} = \frac{1}{(2n+1)n!2^{4n}} \prod_{k=-n+1}^{n} (2D+2k-1), n \in \mathbb{N}$ と予想される.

参考文献

[1] Torquato, S. : Hyperuniform states of matter. Phys. Rep. **745**, 1–95 (2018)

[2] Katori, M., Shirai, T.: Partial isometries, duality, and determinantal point processes. arXiv:math.PR/1903.04945