統計力学模型やランダム行列模型の流体力学極限およびスケーリング極限に関する研究

研究代表者　香取　眞理　研究員
ﾘｻｰﾁｱｼｽﾀﾝﾄ　遠藤　大樹　準研究員
（物理学専攻）

統計力学模型の1つである砂山模型について,そのスケーリング極限に関連した先行結果と我々の成果を示す.

研究の背景

砂山模型（sandpile model）とは,砂山の崩壊を記述するモデルである.nサイズのd次元格子トーラス$\mathbb{Z}_n^d$に砂山の初期高さを与え,次のアルゴリズムに応じて崩壊し,安定な高さ（1とする）へと向かおうとする過程を考える.

アルゴリズム：次のような並列崩壊を考える.砂山の初期高さをs_0とし,ステップ$t = 1$から始める.

i.　すべての点$x \in \mathbb{Z}_n^d$で砂山が安定$s_{t-1}(x) \le 1$ならばアルゴリズムを終了する.

ii.　各点$x \in \mathbb{Z}_n^d$で崩壊質量$(s_{t-1}(x) - 1)^+$を定義する.

$$(s_{t-1}(x) - 1)^+ := \max\{0, s_{t-1}(x) - 1\}$$

iii.　各点$x \in \mathbb{Z}_n^d$でステップtでの砂山の高さs_tをグラフ・ラプラシアン$(-\Delta_G)$を使い次のように定める.

$$\begin{aligned} s_t(x) &= s_{t-1}(x) - (-\Delta_G)(s_{t-1}(x) - 1)^+ \\ &= s_{t-1}(x) \\ &\quad -(s_{t-1}(x) - 1)^+ + \frac{1}{2d} \sum_{y \in \{y \in \mathbb{Z}_n^d : |x-y|=1\}} (s_{t-1}(x) - 1)^+ \end{aligned}$$

iv.　次のステップへ進む.（tを$+1$する）

アルゴリズムが終了することを砂山が安定,対してアルゴリズムが終了しないことを砂山が爆発すると呼ぶ.

オドメーター関数：ステップtまでの各点$x \in \mathbb{Z}_n^d$から移動した総質量$u_t(x)$を次のように定義する.

$$u_t(x) := \sum_{t'=0}^{t-1} (s_{t'}(x) - 1)^+ \ .$$

砂山が安定するとき,安定状態での砂山の高さ$s(x)$は,オドメーター関数$u(x) := \lim_{t\to\infty} u_t(x)$を用いて次のように表される.

$$s_\infty(x) = s_0(x) - (-\Delta_G)\, u(x)$$

砂山の初期高さを次のようにランダムに与える.[2]

$$s_0(x) = 1 + \sigma(x) - \frac{1}{n^d} \sum_{y \in \mathbb{Z}_n^d} \sigma(y), \qquad x \in \mathbb{Z}_n^d \ .$$

オドメーター関数の極限共分散について次の結果が示された.[1]

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2\, \mathbb{E}[u(x)u(y)] \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\exp(2\pi i\,(X-Y)k)}{|k|^4}, \qquad d \le 3 \ .$$

ここで,$\frac{x}{n} \to X \in \mathbb{T}^d$,$\frac{y}{n} \to Y \in \mathbb{T}^d$とした.また$a_n$はスケーリング定数である.

$$a_n = \frac{4\pi^2}{2d} n^{\frac{d-4}{2}} .$$

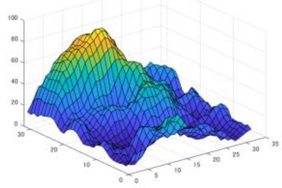

図1. 2次元でのサンプルオドメーター関数のグラフ
（$n = 32$,MATLAB作成）

主結果

一般d次元での先行結果に対して,我々は次元を$d = 1{,}2$と限定することで級数展開を用いない表記を得ることを目的とした.
1次元の場合次の結果を得た.

$$K(X) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\exp(2\pi i\, X\, k)}{|k|^4} = -\frac{2}{3}\pi^4 X^4 + \frac{4}{3}\pi^4 X^3 - \frac{2}{3}\pi^4 X^2 + \frac{\pi^4}{45}$$

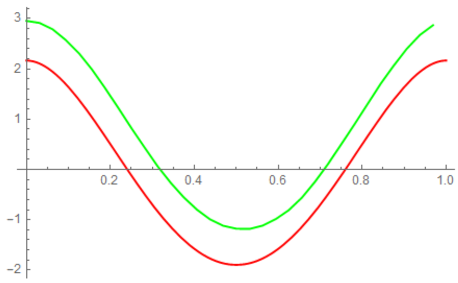

図2.本研究の結果（赤線）とサンプルオドメーター関数1024個による標本共分散（緑線）の比較.（$n = 32$, Mathematica作成）

また2次元の場合,次の式で定義される変形ヤコビテータ関数で表すことが出来ると考えている.

$$\theta(z;p) := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - z\,p^j)(1 - \frac{p^{j+1}}{z})$$

テータ関数は次のような2重周期的な性質を持つ.

$$\theta(pz;p) = -\frac{1}{z}\theta(z;p)$$

$$\theta\left(\frac{1}{z};p\right) = -\frac{1}{z}\theta(z;p)$$

このことは2次元トーラスによる2重周期性を顕わに示している.

結び

先行研究[1]は砂山模型のスケーリング極限として,非整数ガウス場の一種である重ラプラス場との関係を示した.d次元トーラス$\mathbb{T}^d$で一般に示された結果に対して低次元に限定することでより詳細な調査を可能としている.図2.に示される通り実際の砂山模型の極限共分散は本結果の定数シフトであり,この定数は今後の調査対象である.

参考文献：
[1] Cipriani, A., Hazra, R. S., & Ruszel, W. M. : Scaling limit of the odometer in divisible sandpiles. Probability theory and related fields, 172(3-4), 829-868 (2018).
[2]Levine, L., Murugan, M., Peres, Y., & Ugurcan, B. E. : The divisible sandpile at critical density. Annales Henri Poincar´e (Vol. 17, No. 7, pp. 1677-1711). Springer International Publishing.
[3] Ruszel, W.M. : Odometers of Divisible Sandpile Models: Scaling Limits, iDLA and Obstacle Problems - A Survey. Markov Processes and Related Fields v.26, Issue 1, 125-166 (2020) (arXiv:1903.06263).