

ポアソン点過程とジニブル点過程上での感染における逆転現象1

中央大学大学院理工学研究科物理学専攻香取研究室修士2年赤池誠、修士1年石井理矩斗

ポアソン点過程(PPP)とジニブル点過程(GPP)

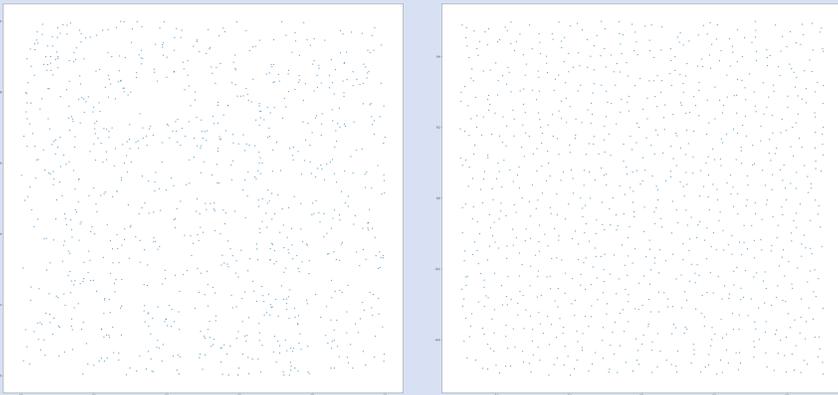


図1. PPP(左)とGPP(右)

PPP(Poisson Point Process)は空間的に一様な分布、**一様分布**になり、図1.左図のように疎密が見られる。この疎密は揺らぎ、つまり偶然によるものである。一方、GPP(Ginibre Point Process)は各点が相互作用し、**超一様性**と呼ばれる偏りのない点配置なので、密度や揺らぎが抑制され、図1.右図のように疎密が現れない。

critical filling factor κ_c の推定

この点過程上での感染症モデルを考えるために、点ごとに半径 r の円板を与え、点同士の円板が重なった際にその点を繋げるということをする。その半径 r は以下で与えられる。

$$r = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho\pi}}$$

ρ は密度で、図1.では土台に1000個の点があるので、 $\rho = 1000$ 。 κ は**filling factor**と呼ばれるもので、これを変化させると点同士の繋がりの様相が大きく変化する。

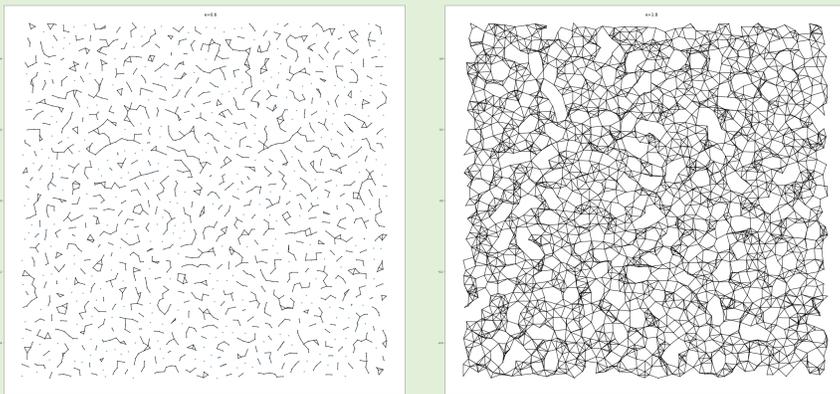


図2. PPP上での点の繋がり $\kappa=0.6$ (左), $\kappa=1.8$ (右)

図2.左図では、大きくても10個程度のクラスターが点在しているが、図2.右図では全ての点が繋がり一つの大きなクラスターを形成している。このように κ を変えることで、より大きなクラスターを形成していくことが分かる。では、急激にクラスターが大きくなる時の κ の値 κ_c を推定してみよう。

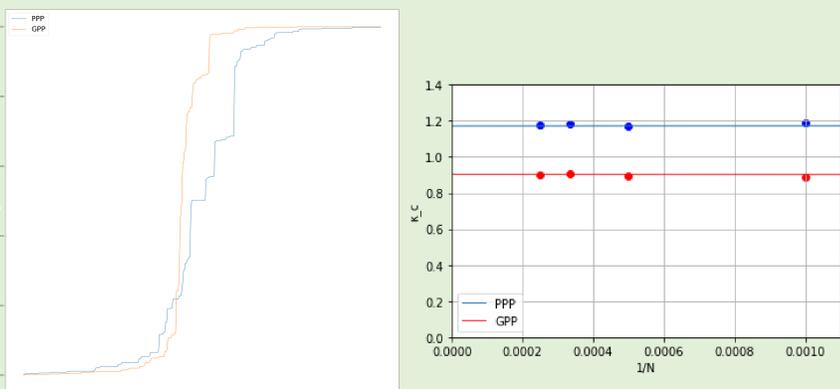


図3. critical filling factor κ_c の推定

図3.左図は κ を大きくしていくと、最大クラスターの点の数と点の総数の比で与えられる**パーコレーション確率**が1に収束していく様子が見える。最大の傾きとなったところの κ の値を求め、点の総数 N を変化させ同様に求めたものをプロットし、 N が大きくなった際の κ_c を算出した。 κ_c は図3.右図の切片に対応し、それぞれ、 $\kappa_c^{PPP} = 1.17, \kappa_c^{GPP} = 0.903$ と求まる。

SIRモデル

未感染人口 S 、感染人口 I 、治癒人口 R 、感染率 β 、回復率 γ としたとき、図1のようなモデルが成り立つ。



図4.SIRモデル

図4は、未感染人口が感染率 β で感染人口になり、感染人口が回復率 γ で治癒人口になるということを表している。この時 β, γ を定数とし、 S, I, R が時間 t のみに依存しているとき次の3つの式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) \end{aligned}$$

これは、SIRモデルが閉じた系であるため $\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$ であり、未感染人口は微小時間に $\beta S(t)I(t)$ だけ少なくなり、治癒人口は微小時間に $\gamma I(t)$ だけ多くなるということを表している。

Off-lattice上でのSIRモデルシミュレーション

Off-lattice上での感染シミュレーションは未感染者 S 、感染者 I 、治癒者 R 、感染率 λ 、回復率 μ としたとき、図5の方法によって感染シミュレーションを行う。

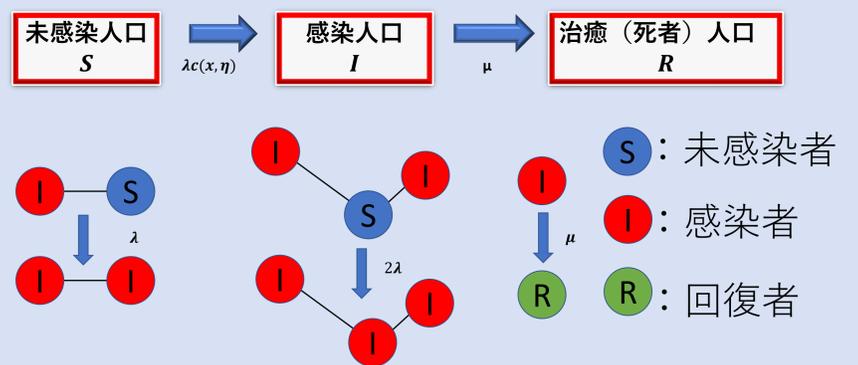


図5. Off-lattice上でのSIRモデルシミュレーション

図5は、点と点が繋がっていれば感染するということであり、未感染者に n 人の感染者と繋がっていれば、 $n\lambda$ という感染率で感染することを表している。ここで、 \mathbf{x} は点の配置、 $\eta(\mathbf{x})$ は点の状態すなわち3つの状態があるので $\eta(\mathbf{x}) \in \{S, I, R\}$ である。したがって、 $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \eta) = n$ (linear model)と考えると感染シミュレーションを行う。

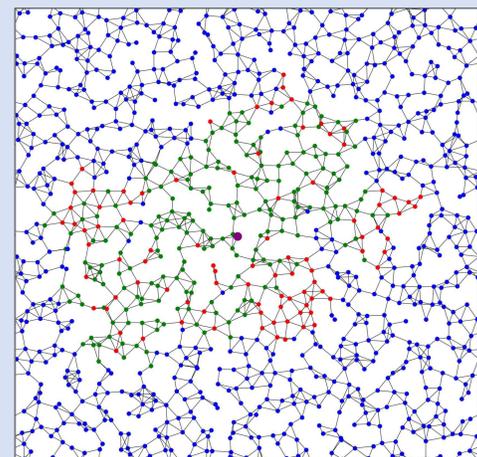


図6.ジニブル点過程上でのSIRモデルシミュレーション
図6は、 $\kappa=1.3$ のGPP上で紫色の点を始点として図5の方法で感染シミュレーションを行った図である。青色が未感染者、赤色が感染者、緑色が回復者を表す。