

# multiple radial SLE の流体力学極限での振舞いについて

中央大学理工学研究科物理学専攻 香取研究室 博士後期課程3年 遠藤大樹

Schramm-Loewner Evolution (SLE) と呼ばれるランダムな曲線の成長についての研究を紹介する。このポスターでは先行研究として、図 1. のような上半平面  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im[z] > 0\}$  へと成長するモデルを紹介し、単位円板内  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  での問題を示す。主結果としてランダム曲線の先端の集合である  $\partial K_t$  を明示する。また今後の発展を述べる。

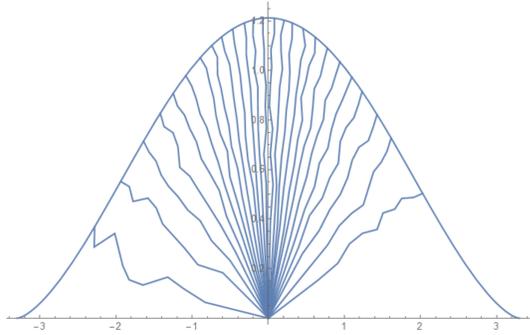


図 1. 相互作用し、互いに交わらないランダムな曲線の模式図と、無限本の曲線の先端による界面  $\partial K_{t=1}$  ([2]を参考に作成)

## 先行研究

### • chordal SLE : 上半平面 $\mathbb{H}$ 上のランダム曲線について

Dyson model とは、パラメータ  $\beta > 0$  に対して次の確率微分方程式に従う粒子系  $\{X_j^N(t)\}_{j=1, \dots, N} \in \mathbb{W}_N, X_j^N(t) \in \mathbb{R}$  であり、ランダム行列理論でよく知られている。ここで  $\{B_j^N(t)\}_{j=1, \dots, N}$  は独立なブラウン運動である。

$$dX_j^N(t) = dB_j(t) + \frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{X_j^N(t) - X_k^N(t)} dt.$$

以下パラメータ  $\kappa = 8/\beta$  について  $0 < \kappa \leq 4$  とする。次の時間変更を行う。

$$V_j^N(t) := X_j^N(\kappa t/N)$$

Dyson model で駆動される multiple SLE を考える。  $\{V_j^N(t)\}_{j=1, \dots, N}$  を駆動関数とし、実軸上  $\mathbb{R}$  から上半平面  $\mathbb{H}$  へと時間  $t \in (0, \infty)$  で発展し、無限遠へ向かう  $N$  本のランダムな単純曲線  $\{\gamma_j^N(t)\}_{j=1, \dots, N}$  を考える。次の微分方程式の解  $g_t(z)$  はランダム曲線  $\{\gamma_j^N(t)\}_{j=1, \dots, N}$  を表す。

$$\partial_t g_t(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{2}{g_t(z) - V_j^N(t)},$$

時刻  $t \in (0, \infty)$  において、  $g_t(\gamma_j^N(t)) = V_j^N(t)$  である。また時刻  $t$  までのランダム曲線を  $\bigcup_{j=1}^N \gamma_j^N(0, t]$  と表記すると  $g_t(z)$  は次の等角写像である。

$$\mathbb{H} \setminus \bigcup_{j=1}^N \gamma_j^N(0, t] \rightarrow \mathbb{H}$$

この  $N \rightarrow \infty$  極限を考える。極限での等角写像  $g_t(z)$  は以下の連立方程式の解として与えられる。 ([1,2])

$$\begin{cases} \partial_t g_t(z) = M_t(g_t(z)), \\ \partial_t M_t(z) = -2 M_t(z) \partial_z M_t(z), \quad M_t(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{z-u} \rho_t(u) du. \end{cases}$$

下段の式は非粘性の複素 Burgers 方程式である。  $\rho_t(u)$  は駆動関数である Dyson model の確率密度関数であり、Wigner's Semicircle Law として知られている。ここで Hull と呼ばれる次の集合を境界として持つ、等角写像  $g_t(z)$  によって実軸に写される  $\mathbb{H}$  の部分集合  $K_t$  について注目する。

$$\partial K_t = g_t^{-1}(\text{supp} \rho_t), \quad \text{supp} \rho_t = \overline{\{u \in \mathbb{R} \mid \rho_t(u) > 0\}}.$$

$\partial K_t$  はランダム曲線の先端の集合といえる。[2]では特定の初期条件に対し  $\partial K_t$  を明示した。すべての曲線が原点出発である場合 ( $\rho_t(u) = \delta(u)$ ) については次の通り 1つのパラメータ  $\varphi$  による表示を行った。([2]の Proposition 3.2 や本ポスター図 1. 参考)

$$K_t = \sqrt{t} \mathcal{K} \\ \mathcal{K} = \left\{ \tilde{\Gamma}_s(\varphi) \mid \tilde{\Gamma}_s(\varphi) = 2ir \exp\left(-i\varphi - \frac{\exp(2i\varphi)}{2}\right), \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0, 1] \right\}.$$

### • radial SLE : 円板上のランダム曲線について

ランダム曲線をこれまでの代わりに円周上  $\partial \mathbb{D}$  から円板内  $\mathbb{D}$  へと延び、円板内の点  $0$  へ向かうときを考える。[3]は円周上の Dyson model と呼べる相互作用するランダム粒子系によって駆動される radial multiple SLE を考え、その極限における等角写像が次の連立方程式によって与えられることを示した。

$$\begin{cases} \partial_t g_t(z) = g_t(z) M_t(g_t(z)), \\ \partial_t M_t(z) = -2z M_t(z) \partial_z M_t(z), \quad M_t(\exp(i\theta)) = -i \int_{-\pi}^{\pi} \cot\left(\frac{\phi - \theta}{2}\right) \rho_t(\phi) d\phi \end{cases}$$

この連立方程式を用いて、  $z = 1$  出発の初期条件  $\rho_t(\phi) = \delta(\phi)$  に対する Dyson model の円周上への拡張を行った際の分布  $\rho_t$  を明示し  $\text{supp} \rho_t$  を導出した。逆写像  $g_t^{-1}(\text{supp} \rho_t)$  として Hull の境界  $\partial K_t$  の明示を行った。その結果を報告する。

## 円周上の Dyson model の確率密度関数

円周上の Dyson model の流体力学極限での確率密度関数について、次の結果を得た。定理 1

時刻  $t > 0$ , 非負パラメータ  $\xi$  を後で定義する集合  $S_t^\xi$  の要素とする。以下を定義する。

$$\eta_t(\xi) := \sqrt{-\xi^2 + 2\xi \coth(2t\xi) - 1}, \\ \sigma_t(\xi) := \frac{\xi + i\eta_t(\xi) - 1}{\xi + i\eta_t(\xi) + 1} \exp(2t(\xi + i\eta_t(\xi))).$$

$\xi$  の定義域  $S_t^\xi$  は  $\eta_t$  の零点  $\xi_c^\pm(t) : \eta_t(\xi_c^\pm(t)) = 0, \xi_c^-(t) < \xi_c^+(t)$ , を用いて次の通り表される。

$$S_t^\xi := \begin{cases} (0, \xi_c^+(t)] & 0 < t < 1 \\ [\xi_c^-(t), \xi_c^+(t)] & 1 < t \end{cases}$$

偏角  $\theta \in (-\pi, \pi]$  に対するランダム粒子の分布  $\rho_t(\theta)$  は、  $\rho_t(\theta) > 0$  について次のように与えられる。

$$(\theta, \rho_t(\theta)) = \begin{cases} \left( \arg(\sigma_t(\xi)), \frac{\xi}{2\pi} \right) & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \left( -\arg(\sigma_t(\xi)), \frac{\xi}{2\pi} \right) & -\pi < \theta \leq 0 \end{cases}$$

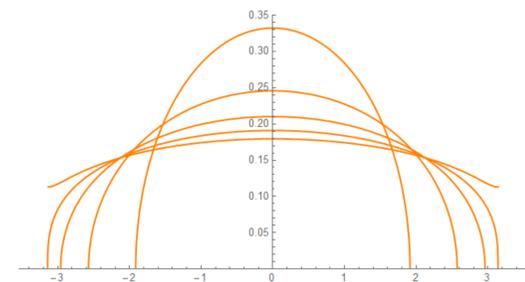


図 2. 円周上で相互作用するランダム粒子の確率密度関数  $\rho_t(\theta)$ .

時刻  $t = 0.2, 0.5, \dots, 1.25$ .

半円のような分布が広がり、  $t > 1$  で円周すべて ( $-\pi < \theta \leq \pi$ ) に広がっていく様子が見られる。

## Hull の境界 $\partial K_t$

radial multiple SLE の流体力学極限における Hull の境界  $\partial K_t$  について次の結果を得た。定理 2.

$\xi, \eta_t(\xi), S_t^\xi$  を定理と同様に定義する。  $X_t(\xi)$  を定義する。

$$X_t(\xi) := \frac{4}{(\xi + i\eta_t(\xi))^2 - 1} \exp(-t(\xi + i\eta_t(\xi))^2).$$

このとき  $\partial K_t$  は次で定義する  $\Gamma_t(\xi)$  を用いて  $\xi$  による 1パラメータで表示される。

$$\Gamma_t(\xi) := 1 + \frac{1}{2} X_t(\xi) \pm \sqrt{4X_t(\xi) + (X_t(\xi))^2},$$

ただし符号は  $|\Gamma_t(\xi)| \leq 1$  を満たすように選択する。

初期条件  $\rho_t(\phi) = \delta(\phi)$  での SLE Hull の極限  $\partial K_t$  は次の式で与えられる。

$$\partial K_t := \{g_t^{-1}(\exp(i\theta)) \in \mathbb{D} \mid \theta \in \text{supp} \rho_t\} = \left\{ \Gamma_t(\xi) \mid \xi \in S_t^\xi \right\} \cup \left\{ \Gamma_t(-\xi) \mid \xi \in S_t^\xi \right\}$$

ここで  $S_t^\xi$  は  $S_t^\xi$  の  $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  についての閉包(closer)である。

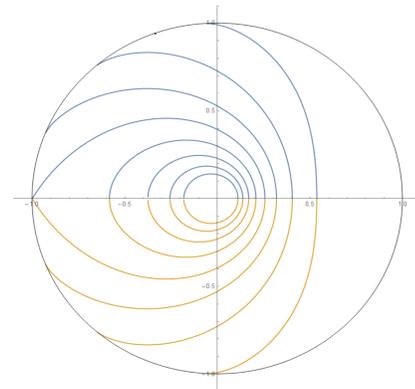


図 3. radial multiple SLE の流体力学極限における Hull の境界の時間発展。

時刻 :  $t = 0.25, 0.5, \dots, 2$ . 青色が  $\{\Gamma_t(\xi) \mid \xi \in S_t^\xi\}$ , 黄色が  $\{\Gamma_t(-\xi) \mid \xi \in S_t^\xi\}$

## 今後の展望

chordal multiple SLE は統計物理モデルのスケーリング極限との対応が知られている。またガウス自由場(GFF)との結合が示されている。 ([4]) radial multiple SLE での Hull の境界の明示は、上半平面での対応関係から円板での対応関係への拡張に対して有用であると考えられる。また radial と chordal ではランダム曲線の終端  $\gamma_j^N(\infty)$  がそれぞれ、(radial) : 領域の内部である円板の中心、(chordal) : 領域の端点である無限遠点と異なる問題となっている。その違いも明らかにできるのではないかと考えている。

## 参考文献

- [1] del Monaco A., SchleiBinger S., Multiple SLE and the complex Burgers equation, Math. Nachr. 289 (2016), 2007–2018.
- [2] Hotta I., Katori M., Hydrodynamic limit of multiple SLE, J. Stat. Phys. 171 (2018), 166–188.
- [3] Hotta I., SchleiBinger S., Limits of Radial Multiple SLE and a Burgers–Loewner Differential Equation, J.Theor. Probab. 34 (2021), 755–783.
- [4] Katori M., Koshida S., Gaussian free fields coupled with multiple SLEs driven by stochastic log-gases, Advanced Study in Pure Mathematics 87 (2021), 315–340.