

物理 1 期末テスト (2010年度)

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．裏も使って良いから，全解答を解答用紙 1 枚に収めよ．

次の 6 問の中から (裏面あり) 3 問を選択して解答せよ．

問題 1. 粘性抵抗を受けて落下する物体の落下速度 v は，運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv \quad (1)$$

に従う．ただしここで， m は物体の質量， g は重力加速度， b は正の定数である．以下の設問に答えなさい．

(1) 終端速度 v_∞ を求めなさい．

(2) 方程式 (1) の解が

$$v = v_\infty + Ae^{-Bt} \quad (2)$$

で与えられるものと仮定する．ただし， A, B は未定定数であり，ともに零ではない．まず，(2) 式を t で微分して， $\frac{dv}{dt}$ を A, B, t を用いて表しなさい．

(3) 上で求めた $\frac{dv}{dt}$ を (1) 式の左辺に代入し，(2) 式を右辺の v に代入する．ただし， v_∞ は問 (1) で求めたものを用いる．すると， B が定まるはずである． B を b, m を用いて表しなさい．

(4) 問 (1) で求めた v_∞ と，問 (3) で求めた B を (2) 式に代入すると， A だけが未定である． $t = 0$ の初速度が v_0 であるとする． A が定まる． A を m, g, b, v_0 を用いて表しなさい．

問題 2. バネ定数 k のバネによって振動する質量 m の質点の運動方程式は，質点の平衡点 (力のつりあいの位置) からの変位を x とすると，次式で与えられる．

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (3)$$

(1) 角振動数 ω を k と m を使って表しなさい．

(2) $x_1 = \cos(\omega t)$ とする．これが (3) 式を満たすことを示しなさい．

(3) $x_2 = \sin(\omega t)$ とする．これも (3) 式を満たすことを示しなさい．

(4) a と b を任意の定数とする．このとき， $y = ax_1 + bx_2$ も (3) 式の解であることを証明しなさい．

(5) 初期変位 ($t = 0$ のときの x の値) を x_0 ，初速度を v_0 とする．この初期条件を満たすには， a と b をそれぞれどのように与えればよいか， x_0, v_0, m, k を用いて答えなさい．

問題 3. 原点を定めて, 質量 m の質点の位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$, 速度を $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, 運動量を $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (mv_x, mv_y, mv_z)$ とする. このとき, 原点のまわりの角運動量はベクトルの外積を用いて $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ で与えられる.

- (1) 角運動量 \vec{L} の x 成分 L_x , y 成分 L_y , z 成分 L_z をそれぞれ $x, y, z, v_x, v_y, v_z, m$ を用いて表しなさい.
- (2) 中心力とは何か, 説明しなさい.
- (3) 力 \vec{F} が中心力である場合には, 角運動量 \vec{L} は一定であることを証明しなさい.
- (4) ケプラーの第 2 法則を, 角運動量という言葉を使って説明しなさい.

問題 4. 流体力学の法則について, 以下の設問に答えなさい.

- (1) ベルヌーイの法則とは何か, 数式を用いて答えなさい.
- (2) 非圧縮性流体に対して, 流量保存則 (連続の方程式) と力学的エネルギー保存則から, 上記のベルヌーイの法則を導きなさい.
- (3) ベルヌーイの法則の応用例を一つあげて, 説明しなさい.

問題 5.

- (1) 半径 a の球の体積は, 3 重積分

$$V = \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta$$

で与えられることを説明しなさい.

- (2) 実際に上の 3 重積分を計算しなさい.

問題 6. 慣性質量と慣性モーメントとは何か, 数式と言葉を使って, なるべく分かりやすく説明しなさい.