物理１　期末テスト（２０１１年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．裏も使って良いから，全解答を解答用紙１枚に収めよ．

次の８問の中から（裏面あり）４問を選択して解答せよ．

問題 1.　粘性抵抗を受けて落下する物体の落下速度 v は，運動方程式 $m\dfrac{dv}{dt} = mg - av$ に従う．ただしここで，m は物体の質量，g は重力加速度，a は正の定数である．時刻 $t = 0$ での，物体の初速度を $v_0 > 0$ とする．以下の設問に答えなさい．

(1)　終端速度 v_∞ を求めなさい．

(2)　$v_0 > v_\infty$ の場合に，運動方程式を解いて $v(t)$ を求めなさい．

(3)　上で求めた $v(t)$ を，t の関数としてグラフに描きなさい．

問題 2.　ばね定数 k のばねによって振動する質量 m の質点の運動方程式は，質点の平衡点（力のつりあいの位置）からの変位を x とすると，次式で与えられる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{1}$$

以下では，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とする．

(1)　$x_1 = \cos(\omega t)$ とする．これが (1) 式を満たすことを示しなさい．

(2)　$x_2 = \sin(\omega t)$ とする．これも (1) 式を満たすことを示しなさい．

(3)　a と b を任意の定数とする．このとき，$y = ax_1 + bx_2$ も (1) 式の解であることを証明しなさい．

(4)　初期変位（$t = 0$ のときの x の値）を x_0, 初速度を v_0 とする．この初期条件を満たすには，a と b をそれぞれどのように与えればよいか，x_0, v_0, ω を用いて答えなさい．

問題 3.　ばね定数 k のばねによって振動する質量 m の質点の運動方程式は，質点の平衡点（力のつりあいの位置）からの変位を x とすると, 次式で与えられる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{2}$$

(1)　周期 T を k と m を用いて表しなさい．

(2)　振幅を A, 初期位相を θ_0, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とすると，(2) 式の解は

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{3}$$

で与えられる．実際に (3) 式を (2) 式に代入して，これが解であることを示しなさい．

(3)　初期変位 ($t = 0$ での x の値) を x_0, 初速度を v_0 とする．これらの値を用いて，$\tan\theta_0$ を表しなさい．

問題 4.　2 つのベクトル $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ と $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ の外積 $\vec{A} \times \vec{B}$ を考える．

(1)　$\vec{A} \times \vec{B}$ はベクトルである．その x, y, z 成分 $(\vec{A} \times \vec{B})_x, (\vec{A} \times \vec{B})_y, (\vec{A} \times \vec{B})_z$ をそれぞれ，$\vec{A}$ の成分と $\vec{B}$ の成分を用いて表しなさい．

(2)　上の問 (1) で答えた結果を導出しなさい．

問題 5.　原点を定めて，質量 m の質点の位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$, 速度ベクトルを $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, 運動量ベクトルを $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (mv_x, mv_y, mv_z)$ とする．このとき，原点のまわりの角運動量ベクトルはベクトルの外積を用いて $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ で与えられる．

(1)　角運動量ベクトル $\vec{L}$ の x 成分 L_x, y 成分 L_y, z 成分 L_z をそれぞれ $x, y, z, v_x, v_y, v_z, m$ を用いて表しなさい．

(2)　力のモーメント $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ が質点に働くと，角運動量ベクトルは

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{N} \tag{4}$$

に従って時間変化することを，ニュートンの運動方程式から導きなさい．((4) 式の x, y, z の 3 つの成分について，それぞれ導きなさい.)

(3)　力 $\vec{F}$ が質点の位置ベクトル $\vec{r}$ と平行あるいは反平行の場合には，角運動量ベクトル $\vec{L}$ は一定であることを証明しなさい．

問題 6.

(1)　半径 a の球の体積は, 3 重積分

$$V = \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin\theta$$

で与えられることを説明しなさい．

(2)　実際に上の 3 重積分を計算しなさい．

問題 7.　慣性質量と慣性モーメントとは何か. 数式と言葉を使って，なるべく分かりやすく説明しなさい．

問題 8.　流体力学の法則について，以下の設問に答えなさい．

(1)　ベルヌーイの法則とは何か，数式を用いて答えなさい．

(2)　ベルヌーイの法則の応用例を一つあげて，詳しく説明しなさい．