物理１　期末テスト（２０１２年度）

教科書持ち込み不可．ノートのみ持ち込み可．裏も使って良いから，全解答を解答用紙１枚に収めよ．

次の５問の中から（裏面あり）２問を選択して解答せよ.

問題 1.　粘性抵抗を受けて落下する物体の落下速度の大きさ v は，運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \tag{1}$$

に従う．ただしここで，m は物体の質量，g は重力加速度の大きさ，b は正の定数である．

(1)　終端速度 v_∞ を求めなさい.

(2)　方程式 (1) の解が

$$v = v_\infty + Ae^{-Bt} \tag{2}$$

で与えられるものと仮定する．ただし，A, B は未定定数であり，ともに零ではない．まず，(2) 式を t で微分して，$\dfrac{dv}{dt}$ を A, B, t を用いて表しなさい.

(3)　上で求めた $\dfrac{dv}{dt}$ を (1) 式の左辺に代入し，(2) 式を右辺の v に代入する．ただし，v_∞ は問 (1) で求めたものを用いる．すると，B が定まるはずである．B を b, m を用いて表しなさい.

(4)　問 (1) で求めた v_∞ と，問 (3) で求めた B を (2) 式に代入すると，A だけが未定である．$t = 0$ での初速度が v_0 であるとすると，A が定まる．A を m, g, b, v_0 を用いて表しなさい.

(5)　得られた解 $v = v(t)$ を, 時刻 t の関数としてグラフに描きなさい．ただし，$v_0 > v_\infty$ とする.

問題 2.　バネ定数 k のバネによって振動する質量 m の質点の運動方程式は，質点の平衡点（力のつりあいの位置）からの変位を x とすると，次式で与えられる.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{3}$$

(1)　角振動数 ω を k と m を使って表しなさい.

(2)　$x_1 = \cos(\omega t)$ とする．これが (3) 式を満たすことを示しなさい.

(3)　$x_2 = \sin(\omega t)$ とする．これも (3) 式を満たすことを示しなさい.

(4)　a と b を任意の定数とする．このとき，$y = ax_1 + bx_2$ も (3) 式の解であることを証明しなさい.

(5)　定数 a と b を調整すると，$y = ax_1 + bx_2$ は振幅 A, 初期位相 θ の解

$$x = A\cos(\omega t + \theta) \tag{4}$$

を表すこともできる．このときの a と b を, A と θ を用いて与えなさい.

問題 3.　原点を定めて，質量 m の質点の位置ベクトルを $\vec{r}=(x,y,z)$, 速度を $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, 運動量を $\vec{p}=(p_x,p_y,p_z)=(mv_x,mv_y,mv_z)$ とする．このとき，原点のまわりの角運動量はベクトルの外積を用いて $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ で与えられる．

(1)　角運動量 $\vec{L}$ の x 成分 L_x, y 成分 L_y, z 成分 L_z をそれぞれ x,y,z,v_x,v_y,v_z,m を用いて表しなさい．

(2)　中心力とは何か，説明しなさい．

(3)　力 $\vec{F}$ が中心力である場合には，角運動量 $\vec{L}$ は一定であることを証明しなさい．

(4)　太陽系の惑星は各々，太陽を含むある一つの平面上を回る（この面を公転面という)．その理由を，角運動量保存則と関係付けて説明しなさい．

(5)　ケプラーの第 2 法則を，角運動量保存則と関係付けて説明しなさい．

問題 4.

(1)　3 次元極座標について説明しなさい．

(2)　半径 a の球の体積は, 3 重積分

$$V=\int_0^a dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2\sin\theta$$

で与えられることを説明しなさい．

(3)　実際に上の 3 重積分を計算しなさい．ただし，計算の途中経過もなるべく詳しく書くこと．

(4)　辺の長さが a の正方形を底面とする長さ L の角柱の体積は $V=a^2L$ である．このことを，x,y,z の 3 重積分を用いて導出しなさい．

(5)　半径が a の円を底面とする長さ L の円柱の体積は $V=\pi a^2L$ である．このことを，3 重積分を用いて導出しなさい．

問題 5.　流体力学の法則についての設問 (1), (2) と波動についての設問 (3)-(5) に答えなさい．

(1)　ベルヌーイの法則とは何か，数式を用いて答えなさい．

(2)　ベルヌーイの法則の応用例を一つあげて，詳しく説明しなさい．

(3)　長さ L[m], 線密度 ρ[kg/m] の弦が x 軸に沿って張力 S[N] で張ってある．この弦の時刻 t, 位置 x での変位を $y(x,t)$ とすると，これは波動方程式 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{\rho}{S}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ を満たす．この解として

$$y(x,t)=A\sin\left(\frac{4\pi}{L}x-\frac{4\pi}{L}vt\right)+A\sin\left(\frac{4\pi}{L}x+\frac{4\pi}{L}vt\right) \tag{5}$$

を考える．ただし A は正の定数とする．$\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$ 及び $\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ を計算しなさい．

(4)　(5) 式が波動方程式を満たすように v を定めなさい．

(5)　(5) 式で与えられる解はどのような振動を表すか，図を用いて説明しなさい．