応用解析１　期末テスト（２００８年度）

ノートのみ持ち込み可．裏面も使って良いので，解答は解答用紙一枚に収めること．

次の 3 問に答えなさい．(裏面もあるので注意.)

問題 I.　次の微分方程式を考える；

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0 \tag{1}$$

(1)　級数解 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\rho}$ を微分方程式 (1) に代入して，指数 ρ を決定する式が $\rho^2-\frac{1}{4}=0$ となることを導け.

(2)　上の結果より，$\rho=\pm\frac{1}{2}$ である．$\rho=\frac{1}{2}$ とすると，級数解は

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1/2}=a_0x^{1/2}+a_1x^{3/2}+a_2x^{5/2}+\cdots=\frac{a_0}{\sqrt{x}}\left(x+\frac{a_1}{a_0}x^2+\frac{a_2}{a_0}x^3+\cdots\right)$$

$\rho=-\frac{1}{2}$ とすると，級数解は

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n-1/2}=a_0x^{-1/2}+a_1x^{1/2}+a_2x^{3/2}+\cdots=\frac{a_0}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\cdots\right)$$

となるので,

$$y=\frac{a_0}{\sqrt{x}}z \tag{2}$$

とおけば，$z=z(x)$ は $x=0$ で正則な関数として求められるはずである．(2) 式を (1) 式に代入して，z に対する微分方程式を導け.

(3)　問 (2) で求めた方程式を解くことにより，元の微分方程式 (1) の一般解を与えよ.

問題 II. ガウス積分 $I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．ただし，$\alpha > 0$ とする．積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{3}$$

の左辺を α で微分すると，(この場合は微分と積分の順番を入れ替えても良いので)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-x^2) e^{-\alpha x^2} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$$

右辺を α で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^{-1/2} = -\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \alpha^{-3/2}$$

となる．よって, 次が得られる．

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \alpha^{-3/2}. \tag{4}$$

(1)　(4) 式の両辺を再度 α で微分することにより，積分 $I_4(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ．

(2)　同様にして，積分 $I_6(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-\alpha x^2} dx$, $I_8(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^8 e^{-\alpha x^2} dx$, $I_{10}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{10} e^{-\alpha x^2} dx$ を求めよ．

(3)　$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，一般に $I_{2n}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx$ はどのように与えられると予想されるか．$(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdots 3 \cdot 1$ を用いて表せ．

(4)　上の予想を n に関する数学的帰納法を用いて証明せよ．

問題 III. $\alpha > 0$, $h_0^\alpha(x) = 1, h_1^\alpha(x) = x$ とする．$c_2^{(0)}(\alpha)$ を x には依らない定数であるとして (α には依存する), $h_2^\alpha(x) = x^2 + c_2^{(0)}(\alpha)$ とおく．$h_0^\alpha(x)$ と $h_2^\alpha(x)$ の積に $e^{-\alpha x^2}$ をかけたものの全積分が零であるという条件 (直交条件) を課すと ($h_0^\alpha(x) = 1$ なので $h_0^\alpha(x)h_2^\alpha(x) = h_2^\alpha(x)$ であるから),

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_0^\alpha(x)h_2^\alpha(x)e^{-\alpha x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}(x^2 + c_2^{(0)}(\alpha))e^{-\alpha x^2}dx \\ &= I_2(\alpha) + c_2^{(0)}(\alpha)I_0(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\alpha^{-3/2} + \sqrt{\pi}\alpha^{-1/2}c_2^{(0)} \end{aligned}$$

である．(ここで $I_{2n}(\alpha)$ は問題 II で求めた積分.) これより $c_2^{(0)} = -1/(2\alpha)$，つまり $h_2^\alpha(x) = x^2 - \dfrac{1}{2\alpha}$ と定まる．

(1) $h_3^\alpha(x) = x^3 + c_3^{(1)}(\alpha)x$ とする．直交条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1^\alpha(x)h_3^\alpha(x)e^{-\alpha x^2}dx = 0$$

を満たすように，$c_3^{(1)}(\alpha)$ を定めよ．

(2) $h_4^\alpha(x) = x^4 + c_4^{(2)}(\alpha)x^2 + c_4^{(0)}(\alpha)$ とする．直交条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_0^\alpha(x)h_4^\alpha(x)e^{-\alpha x^2}dx = 0$$

を課すと，係数 $c_4^{(2)}(\alpha)$ と $c_4^{(0)}(\alpha)$ の間にどのような関係式が導かれるか．

(3) さらに，もう一つ直交条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_2^\alpha(x)h_4^\alpha(x)e^{-\alpha x^2}dx = 0$$

を課すことにより，2 つの係数 $c_4^{(2)}(\alpha)$ と $c_4^{(0)}(\alpha)$ を定めよ．