応用解析１　期末テスト（２００９年度）

ノートのみ持ち込み可．裏面も使って良いので，解答は解答用紙一枚に収めること．

次の 3 問に答えなさい．

問題 I.　x の 2 次関数 $F(x) = ax^2 + bx + c$ を考える．次の 3 つの条件を満たすように，係数 a, b, c を定めなさい．

$$\int_{-1}^{1} F(x)dx = 0, \quad \int_{-1}^{1} xF(x)dx = 0, \quad F(1) = 1.$$

問題 II.　$\Gamma(z)$ をガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

とする (ただし $z > 0$ とする)．以下の設問に答えよ．

(1)　次の関数等式が成り立つことを証明せよ．

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

(2)　$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(3)　$n = 0, 1, 2, \cdots$ とする．$\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

問題 III.　エルミート多項式 $H_n(x)$ を用いて，エルミート関数 $\varphi_n(x)$ は

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

と定義される．以下の設問に答えよ．

(1)　エルミート多項式の 3 項間漸化式

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x)$$

を用いると，$x\varphi_n(x)$ は $\varphi_{n-1}(x)$ と φ_{n+1} を用いて表せることが分かる．これを示せ．

(2)　エルミート多項式は，次のような，微分を含む漸化式も満たす．

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = xH_n(x) + nH_{n-1}(x) - \frac{1}{2}H_{n+1}(x)$$

これを用いると $\dfrac{d}{dx}\varphi_n(x)$ もまた，$\varphi_{n-1}(x)$ と $\varphi_{n+1}(x)$ を用いて表されることが分かる．これを示せ．

(3)　上の 2 つの結果から，次の 2 つの量をエルミート関数を用いて表しなさい．

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\varphi_n(x), \qquad \left(\frac{d}{dx} - x\right)\varphi_n(x)$$

(4)　$\left(\dfrac{d}{dx} + x\right)\left(\dfrac{d}{dx} - x\right)\varphi_n(x)$ を計算することにより，次が成り立つことを導きなさい．

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2\right)\varphi_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$