応用解析１　期末テスト（２０１０年度）

ノートのみ持ち込み可．裏面も使って良いので，解答は解答用紙一枚に収めること．

次の 3 問（裏面あり）に答えなさい．

問題 I.　以下の誘導に従って，ガウス積分の公式

$$I_{\rm G} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{1}$$

を導きなさい．ただし，$a > 0$ である．

(1)　積分変数を x ではなく y と書いた $I_{\rm G} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$ を用意する．この 2 つの定積分の値は，当然，同じなので，この 2 つをかけたものは $I_{\rm G}$ の 2 乗に他ならない．しかしこれは，

$$I_{\rm G}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-a(x^2+y^2)} \tag{2}$$

と書くこともできる．そのため，$I_{\rm G}^2$ を 2 次元平面上の面積分と見なすことができる．積分変数を 2 次元デカルト座標 (x, y) から 2 次元極座標 (r, θ) へ，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\, (0 \le r < \infty, 0 \le \theta < 2\pi)$ によって変換する．この積分変数の変換に伴うヤコビ行列式（ヤコビアン）

$$J \;\; \equiv \;\; \det \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}$$

を求めなさい．

(2)　上述の変数変換より $x^2 + y^2 = r^2$ なので，(2) 式の積分は

$$I_{\rm G}^2 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta\, J e^{-ar^2}$$

となる．この積分を計算しなさい．その結果の平方根をとると，(1) 式の積分値が導かれる．
ヒント： r の積分では，$r^2 = z$ と置いて，積分変数を z に変換しなさい．

問題 II.　x の 3 次式 $F(x) = ax^3 + bx$ を考える．次の 2 つの条件を満たすように，係数 a と b を求めなさい．ただし，$a > 0$ とする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) x e^{-x^2} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{F(x)\Big\}^2 e^{-x^2} dx = 1. \tag{3}$$

ただし，次の積分公式を用いてよいものとする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

ここで，$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$, $1!! = 1$, $(-1)!! = 1$ である．

問題 III. $D = 1, 2, 3, \ldots, a > 0$ として，次の D 重積分を考えることにする．

(1)

$$I_D = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_D \, \exp\Big\{ -a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_D^2) \Big\}. \tag{5}$$

被積分関数は $\exp\Big\{ -a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_D^2) \Big\} = e^{-ax_1^2} \times e^{-ax_2^2} \times \cdots \times e^{-ax_D^2}$ というように積で書ける．このことから，D 重積分 I_D は，問題 I で導いたガウス積分 I_{G} の D 乗に等しいことを説明しなさい．

(2) D 次元の半径 1 の球の体積を c_D と書くことにする．D 次元の半径 r の球は，当然，同じ次元の半径 1 の球と相似である．D 次元球を考えているので，半径が 1 から r へと r 倍されると体積は r^D 倍される．よって，D 次元の半径 r の球の体積は $c_D r^D$ ということになる．D 次元空間中の半径 r の球の表面（球面）と，これと中心が等しい半径 $r + dr$ の球の球面に挟まれた領域を，半径 r の D 次元球殻という．この球殻の体積は，半径 $r + dr$ の D 次元球の体積から，半径 $r + dr$ の D 次元球の体積を引いたものである．これは，dr が小さいときには

$$c_D(r + dr)^D - c_D r^D = D c_D r^{D-1} dr + \mathrm{O}((dr)^2) \tag{6}$$

で与えられることを示せ．ただし，dr の 2 次以上の微小量を $\mathrm{O}((dr)^2)$ と書いた．$\mathrm{O}((dr)^2)$ を無視すると，半径 r の球殻の体積は $D c_D r^{D-1} dr$ で与えられることになる．

(3) (5) 式で与えた D 重積分は，D 次元空間全域での積分である．D 次元空間は，上述の半径 r の球殻（厚さ dr は無限小と考える）を $r = 0$ から $r = \infty$ までたし合わせることによって覆いつくすことができる．積分 (5) の被積分関数は，$(x_1, x_2, \ldots, x_D) = (0, 0, \ldots, 0)$ を原点とすると，この原点からの距離 $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_D^2}$ の関数として e^{-ar^2} と表せる．よって，この積分は原点を中心とする球殻のたし合わせ（半径 r についての積分）

$$I_D = \int_0^{\infty} e^{-ar^2} D c_D r^{D-1} dr \tag{7}$$

で与えることができる．この積分は，講義で説明したガンマ関数 $\Gamma(x)$ を使って，

$$I_D = \frac{c_D}{a^{D/2}} \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right) \tag{8}$$

と書けることを示しなさい．

ヒント: $ar^2 = s$ と変数変換しなさい．また，ガンマ関数の関係式 $\Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right) = \frac{D}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$ を用いよ．

(4) 問 (1) で示したように，これは I_{G}^D に等しい．このことから，

$$c_D = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2 + 1)} \tag{9}$$

という公式を導きなさい．

(5) 以上の結果より，(a) 半径 r の円の面積，(b) 半径 r の 3 次元球の体積，(c) 半径 r の 4 次元球の体積，(d) 半径 r の 5 次元球の体積，をそれぞれ r を用いて与えなさい．