応用解析１　期末テスト（２０１１年度）

ノートのみ持ち込み可．裏面も使って良いので，解答は解答用紙一枚に収めること．

問題　次の微分方程式を考える．

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\frac{dy}{dx} + \nu y = 0. \tag{1}$$

ただし，ν はパラメータである．

(1)　級数解

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{2}$$

を求めよう．係数 a_k が次の漸化式を満たすと，(2) 式は (1) 式の解になっていることを証明しなさい．

$$a_{k+1} = -\frac{\nu - k}{(k+1)^2} a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

(2)　以下では，ν が 0 または自然数 $n = 0, 1, 2, \ldots$ である場合を考えることにする．このときには，上で求めた級数解は，n 次の多項式になることを説明しなさい．

(3)　初項（定数項）を $a_0 = n!$ とする．すると，他の項の係数は

$$a_k = (-1)^k \frac{(n!)^2}{(n-k)!(k!)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

と定まることを示しなさい．ただし，$0! = 1$ とする．

(4)　$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，(4) 式で与えられた係数を持つ多項式を

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{5}$$

と書くことにする．具体的に，多項式 $L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ を書き下しなさい．

(5)　$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$M_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{6}$$

と定義する．$M_0(x), M_1(x), M_2(x), M_3(x)$ を計算してみなさい．

(6)　x と z の 2 変数関数

$$f(x,z) = \frac{1}{1-z} \exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right) \tag{7}$$

を考える．これを $z = 0$ の周りで z に関して，次のように展開する：

$$f(x,z) = N_0(x) + N_1(x)z + \frac{1}{2}N_2(x)z^2 + \frac{1}{3!}N_3(x)z^3 + \cdots. \tag{8}$$

係数に現れる関数 $N_0(x), N_1(x), N_2(x), N_3(x)$ を求めなさい．